高阶微分方程的解法

尹　莎
成都理工大学　四川成都　6100000

摘　要：高阶微分方程是常微分方程中的一类重要方程，它在物理军事等方面有重要的应用价值。本文介绍了高阶微分方程的一些类型，以及相对应的解法。

关键词：高阶微分方程；特征根；特征方程；常数变易法

1.引言

常微分方程是一个未知数及其导数或微分的关系式。微积分和微分方程同一时期产生，在历史上，人们对微分方程的研究大量集中在怎么求出它的通解，而在实际应用中，只有很少的方程能求出通解，所以更多的情况是求方程在某种条件下的特殊解。

目前，人们对常微分方程的概念已经有了很多的了解，也总结了很多常微分方程的有关理论和高阶常系数线性微分方程的不同类型的解法。本文将把高阶常系数线性微分方程的部分解法分为三个部分来讲述。第一部分，分析高阶齐次线性微分方程不同情况下的特征根对应的解和对特殊的欧拉方程的解法。第二部分，讲述了对高阶常系数非齐次线性微分方程的解法。第三部分，讲述了特殊的可降阶的微分方程的解法。

文献[1]解决了对常微分方程的一般理论的研究，文献[2]、[3]解决了对高阶微分方程在方程中的应用问题，文献[4]、[5]、[6]解决了对不同类型的高阶微分方程的各种解法。

2.高阶常系数齐次线性微分方程

定义1：形如

$\mathrm{L}[x]\equiv\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=0$（1）的方程，方程（1）被称为阶常数系齐次线性微分方程，其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$为常数。

定理1：设线性微分方程（1）的解为$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$，且互相线性无关，则$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$也是线性微分方程的解，其中$c_i(i=1,2,\cdots,n)$是任意常数。

定理2：设线性微分方程（1）的解为$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$，则$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$是线性微分方程的通解，其中$c_i(i=1,2,\cdots,n)$是任意常数。

2.1特征根法

在高阶常系数齐次线性微分方程中，求其特征值的方法是解决这类方程的一般方法。为了解出某一高阶齐次微分方程，首先要求得它的基本解组，由叠加原理可知，基本解组的线性组合都是该方程的解，则其线性组合是方程的通解。

这里，首先要解得方程（1）的基本解组。已知一阶线性微分方程的通解的形式为$e^{\lambda t}$，我们把这一阶常系数微分方程的解代入方程（1），可得

$$L\left[e^{\lambda t}\right]\equiv\frac{d^n e^{\lambda t}}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}e^{\lambda t}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{de^{\lambda t}}{dt}+a_n e^{\lambda t}$$
$$=\left(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n\right)e^{\lambda t}\equiv F(\lambda)e^{\lambda t}. \qquad (2)$$

其中$F(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$是$\lambda$的$n$次多项式，$\lambda$为待定常数，它可为实根，也可为复根。显然，如果

$$F(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \qquad (3)$$

的根为λ，那$e^{\lambda t}$便为方程（1）的解，前者为后者成立的充要条件。则方程（3）为方程（1）的特征方程，它的根就是特征根。下面对特征根分类讨论。

2.1.1特征根为单根的情况.

设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是特征方程（3）的$n$个互不相同的根，它们对应的方程（1）的解为

$$e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t}. \qquad (4)$$

其中λ既可为实数，也可为复数，所以我们要对此分类讨论。

假定λ为单实根，那么线性微分方程（1）的通解可表示为

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}.$$

其中$c_i(i=1,2,\cdots,n)$为任意常数。

假定λ为复根，又因为方程（1）的常系数为实数，

作者简介：尹莎（1998—），女，汉族，四川仁寿，研究生在读，常微分方程，成都理工大学，四川成都。

所以得知，方程的解以成对的共轭复根的形式来表示，设其中的一个根为 $\lambda_1=\alpha+i\beta$，则这个根对应的共轭复数 $\lambda_1=\alpha+i\beta$ 同样也是方程的根。那么，与方程（1）对应的复值解为

$$e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t),$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t).$$

显然，与线性微分方程（1）对应的复值解的实数部分是方程的解，对应的虚数部分同样是方程的解，所以方程（1）的实值解为 $e^{\alpha t}\cos\beta t$，$e^{\alpha t}\sin\beta t$.下面给出两个实际的例题进行讲述。

例1 求 $y''-5y'=0$ 的通解。

解：首先特征方程为 $\lambda^2-5\lambda=0$，得特征根 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=5$，所以基础解系为1，e^{5t}，所以方程的通解为 $y=c_1+c_2e^{5t}$，其中 c_1，c_2 为任意常数。

例2 求 $y'''-3y''+9y'+13y=0$ 的通解。

解：首先特征方程 $\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda+13=0$，整理得 $(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda+13)=0$，得特征根为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2+3i$，$\lambda_3=2-3i$，所以基本解组为 e^{-t}，$e^{2t}\cos 3t$，$e^{2t}\sin 3t$，所以方程的通解为 $y=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}\cos 3t+c_3e^{2t}\sin 3t$，其中 c_1，c_2，c_3 为任意常数。

对于这种高阶齐次微分方程的简单计算题，只需要先考虑解出其特征根，解特征方程得到特征根，根据基础解组的形式写出基本解组，得到通解。

2.1.2特征根为重根的情况.

假定特征根 λ_1 是 k 重根，则

$$F(\lambda_1)=F'(\lambda_1)=\cdots=F^{(k-1)}(\lambda_1)=0,\quad F^{(k)}(\lambda_1)\neq 0,$$

对于特征方程 $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-k}\lambda^k=0$，有与它对应的方程为

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}(t)\frac{d^kx}{dt^k}=0\ .$$

前面讨论到高阶齐次微分方程的基本解组为 $e^{\lambda t}$，设 $\lambda_1=0$，易知特征方程有 k 个解 $1,t,t^2,\cdots,t^{k-1}$，且线性无关。设 $\lambda_1\neq 0$，作变量替换 $x=ye^{\lambda_1 t}$，得

$$x^{(m)}=\left(ye^{\lambda_1 t}\right)^{(m)}$$

$$=e^{\lambda_1 t}\left[y^{(m)}+m\lambda_1y^{(m-1)}+\frac{m(m-1)}{2!}\lambda_1^2y^{(m-2)}+\cdots+\lambda_1^my\right].$$

易得

$$L\left[ye^{\lambda_1 t}\right]=\left(\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_ny\right)e^{\lambda_1 t}=L_1[y]e^{\lambda_1 t}.$$

方程（1）可变为

$$L_1[y]\equiv\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0.\qquad(5)$$

$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为常数，得到方程（5）的特征方程为

$$G(\mu)\equiv\mu^n+b_1\mu^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\mu+b_n=0.\qquad(6)$$

据计算得出

$$F(\mu+\lambda_1)e^{(\mu+\lambda_1)t}=L\left[e^{(\mu+\lambda_1)t}\right]=L_1\left[e^{\mu t}\right]e^{\lambda_1 t}=G(\mu)e^{(\mu+\lambda_1)t}.$$

即 $F(\mu+\lambda_1)=G(\mu)$，由此能够知道 $F^{(j)}(\mu+\lambda_1)=G^{(j)}(\mu)$，其中 $j=1,2,\cdots,k$。可知方程（3）与方程（6）的根相对应，且有相同的重数。因而得到方程（1）的 k 个解

$$e^{\lambda_1 t},te^{\lambda_1 t},t^2e^{\lambda_1 t},\cdots,t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}.$$

例3 求 $\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}+4x=0$ 的通解。

解：特征方程为 $\lambda^3-3\lambda^2+4=0$，得特征根 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$（二重根），基本解组为 e^{-t}，e^{2t}，te^{2t}，所以通解为 $x=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}+c_3te^{2t}$，其中 c_1，c_2，c_3 为任意常数。

3.高阶常系数非齐次线性微分方程的解法

定义2：形如

$$\mathrm{L}[x]\equiv\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t)\qquad(7)$$

的方程，我们称它为 n 阶非齐次线性微分方程，简称非齐次线性微分方程。若其中 $f(t)\equiv 0$，则方程（7）变为

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0.\qquad(8)$$

把它称之为与非齐次线性微分方程（7）对应的齐次线性微分方程。

3.1常数变易法

拉格朗日用十一年钻研出了解决线性微分方程的有效方法，即常数变易法。常数变易法其实就是特殊的变量代换，将已知通解中的常数变为的待定函数，通过不断微分解出待定函数来解微分方程。

对于非齐次线性方程（7），已知其基础解组为 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$，得到它的通解是 $x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$，其中 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为任意常数。我们把 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 看作 t 的待定函数，令

$$x=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)+\cdots+c_n(t)x_n(t).\qquad(9)$$

对（9）作 t 的微分，得到

$$x^{(n)}=c_1(t)x_1^{(n)}(t)+c_2(t)x_2^{(n)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n)}(t)$$

$$+c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t).$$

我们令

$$c_1'(t)x_1(t)+c_2'(t)x_2(t)+\cdots+c_n'(t)x_n(t)=0.\qquad(10)$$

能够得到

$$x'=c_1(t)x_1'(t)+c_2(t)x_2'(t)+\cdots+c_n(t)x_n'(t). \quad (11)$$

重复前面的操作，再对（11）作 t 的微分，得到关于 $c_i(t)$ 的方程

$$c_1'(t)x_1^{()}(t)+c_2'(t)x_2'(t)+\cdots+c_n'(t)x_n'(t)=0. \quad (12)$$

以及

$$x''=c_1(t)x_1''(t)+c_2(t)x_2''(t)+\cdots+c_n(t)x_n''(t). \quad (13)$$

对（13）再继续微分，重复此操作到 $n-1$ 阶，可得到 $n-1$ 个关于 $c_i(t)$ 的方程及

$$x^{(n-1)}=c_1(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n-1)}(t). \quad (14)$$

最后再对（14）对 t 微分得到

$$x^{(n)}=c_1(t)x_1^{(n)}(t)+c_2(t)x_2^{(n)}(t)+\cdots+c_n(t)x_n^{(n)}(t)+c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)$$
$$+c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t). \quad (15)$$

最后，我们把过程中得到的条件带入原高阶非齐次线性方程（1）可以得到

$$c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t)=f(t). \quad (16)$$

此时，我们得到了 n 个含有 $c_i'(i=1,2,\cdots,n)$ 的方程，它们组成的系数行列式是 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]$，并且 $W\neq0$，所以这个线性方程组的解可以唯一确定，然后，令 $c_i'(t)=\varphi_i(t)$，把它进行积分，可得 $c_i(t)=\int\varphi_i(t)dt+\gamma_i$，其中 γ_i 为任意常数，$i=1,2,\cdots,n$。

最后，将所有得到的 $c_i'(t)$ 代入（9），便可得到（7）的解，即得到原非齐次线性方程的通解，为

$$x=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i(t)+\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\int\varphi_i(t)dt.$$

当 $\gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 取确定的值时，可得到方程（7）的一个确定的解。

例4 求 $x''-x=\cos t$ 的通解，已知对应齐次线性方程的基本解组为 $x_1=e^t$，$x_2=e^{-t}$。

解：令对应的齐次线性方程的通解为 $x=c_1(t)e^t+c_2(t)e^{-t}$，作 t 微分，得到 $x'=c_1(t)e^t-c_2(t)e^{-t}+c_1'(t)e^t+c_2'(t)e^{-t}$，令 $c_1'(t)e^t+c_2'(t)e^{-t}=0$，得 $x'=c_1(t)e^t-c_2(t)e^{-t}$，再对 t 微分，得到 $x''=c_1(t)e^t+c_2(t)e^{-t}+c_1'(t)e^t-c_2'(t)e^{-t}$，将 x，x'' 代入 $x''-x=\cos t$ 得 $c_1'(t)e^t-c_2'(t)e^{-t}=\cos t$，则有 $\begin{cases}c_1'(t)e^t+c_2'(t)e^{-t}=0\\c_1'(t)e^t-c_2'(t)e^{-t}=\cos t\end{cases}$，解得 $c_1'(t)=\dfrac{\cos t}{2e^t}$，$c_2'(t)=-\dfrac{\cos t}{2e^{-t}}$，将它积分得 $c_1(t)=-\dfrac{1}{4}e^{-t}(\cos t-\sin t)+\gamma_1$，$c_2(t)=-\dfrac{1}{4}e^t(\cos t+\sin t)+\gamma_2$，故原方程的通解为 $x=-\dfrac{1}{2}\cos t+\gamma_1e^t+\gamma_2e^{-t}$，其中 γ_1，γ_2 为任意常数。

3.2 比较系数法

在非齐次线性方程中，若 $f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)e^{\lambda t}$，其中 λ，$b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实常数，则方程有特解

$$\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)e^{\lambda t}. \quad (17)$$

其中 $B_0,B_1,\cdots,B_{m-1},B_m$ 是待定常数，且能够由已知的条件唯一确定。k 由 $F(\lambda)=0$ 确定，如果 λ 是方程 $F(\lambda)=0$ 的特征根且 λ 为单根，那么 $k=1$；假定 λ 是重根，则 k 是 λ 的重数；假定 λ 不是方程 $F(\lambda)=0$ 的特征根，那么 $k=0$。

假定为复数，表示为 $\lambda=\alpha+i\beta$，若 $f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$，其中 α，β 是常数，$A(t)$，$B(t)$ 是含有未知数 t 的实系数多项式，则方程（7）有特解

$$\tilde{x}=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}.$$

这里 k 由 $\lambda=\alpha+i\beta$ 决定，当 $\lambda=\alpha+i\beta$ 是 $F(\lambda)=0$ 的根时，k 为 $\lambda=\alpha+i\beta$ 的重数，当 $\lambda=\alpha+i\beta$ 不是 $F(\lambda)=0$ 的根时，$k=0$。由 $e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$，$e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)$ 变换可得

$$e^{\alpha t}\cos\beta t=\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i},\quad e^{\alpha t}\sin\beta t=\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i}.$$

所以有

$$f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$$
$$=A(t)\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i}-i\frac{B(t)}{2}\left(e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}\right)$$
$$=\frac{A(t)-iB(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t}+\frac{A(t)+iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}$$
$$=f_1(t)+f_2(t).$$

显然，

$$\bar{f}_1(t)=\frac{A(t)+iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}=f_2(t).$$

令 $L[x]=f_1(t)$，$L[x]=f_2(t)$，有 $\tilde{x}_1=t^kD(t)e^{(\alpha+i\beta)t}$，$\tilde{x}_2=t^k\bar{D}(t)e^{(\alpha-i\beta)t}$，所以

$$\tilde{x}=\tilde{x}_1+\tilde{x}_2=t^kD(t)e^{(\alpha+i\beta)t}+t^k\bar{D}(t)e^{(\alpha-i\beta)t}.$$

经过变换可得到

$$\tilde{x}=t^kD(t)e^{(\alpha+i\beta)t}+t^k\bar{D}(t)e^{(\alpha-i\beta)t}=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}.$$

所以 $P(t)=2\operatorname{Re}\{D(t)\}$，$Q(t)=2\operatorname{Im}\{D(t)\}$。

注意：$\max(\partial A(t),\partial B(t))=m$，$\max(\partial P(t),\partial Q(t))\leq m$，$A(t)$，$B(t)$ 可为零，但 $P(t)$，$Q(t)$ 不可为零。

例5 求 $=x''-x=\dfrac{1}{2}e^{t}$ 的通解。

解：第一步求方程对应的齐次微分方程 $x''-x=0$ 的解，由特征根法得基本解组为 e^{t}，e^{-t}，得齐次微分方程的通解为 $x(t)=c_1e^{t}+c_2e^{-t}$.下面求原方程的一个特解，$\lambda=1$ 是特征单根，所以可设特解为 $\tilde{x}(t)=Ate^{t}$，$\tilde{x}'(t)=Ate^{t}$，$\tilde{x}''(t)=Ate^{t}$，代入原方程得 $A=\dfrac{1}{4}$，所以 $\tilde{x}(t)=\dfrac{1}{4}te^{t}$，所以原方程通解为 $x(t)=c_1e^{t}+c_2e^{-t}+\dfrac{1}{4}te^{t}$，其中 c_1，c_2 为任意常数。

例6 求 $x''-5x'+6x=6t^2-10t+2$ 的通解。

解：第一步求方程对应的齐次微分方程 $x''-5x'+6x=0$ 的解，由特征根法得基本解组为 e^{2t}，e^{3t}，得齐次微分方程的通解为 $x(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}$.下面求原方程的一个特解，$\lambda=0$ 不是特征单根，所以可设特解为 $\tilde{x}(t)=t^{0}\left(At^2+Bt+C\right)e^{0t}$，$\tilde{x}'(t)=2At+B$，$\tilde{x}''(t)=2A$，代入原方程得 $A=1$，$B=0$，$C=0$，所以 $\tilde{x}(t)=t^2$，所以原方程通解为 $x(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}+t^2$，其中 c_1，c_2 为任意常数。

例7 求 $x''+x'-2x=e^{t}(\cos t-7\sin t)$ 通解。

解：第一步求方程对应的齐次微分方程 $x''+x'-2x=0$ 的解，由特征根法得基本解组 e^{-2t}，e^{t}，得齐次微分方程的通解为 $x(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{t}$，又因为 $\lambda=\alpha+i\beta=1+i$ 不是特征根，所以 $k=0$，所以可设特解为 $\tilde{x}(t)=(A\cos t+B\sin t)e^{t}$，$\tilde{x}'(t)=\left[(A+B)\cos t+(B-A)\sin t\right]e^{t}$，$\tilde{x}''(t)=(2B\cos t-2A\sin t)e^{t}$，代入原方程得 $A=2$，$B=1$，所以原方程通解为 $x(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{t}+(2\cos t+\sin t)e^{t}$，其中 c_1，c_2 为任意常数。

3.3拉普拉斯变换法

Laplace 变换法是工程数学中常用的一种可将一个有参数 $t(t\geq 0)$ 的函数变成一个参数为复数的函数的线性变换。*Laplace* 变换法可以通过把微分方程变换为代数方程来使方程简单化，不需要求特解再求通解。

对于 $t\geq 0$ 的所有实数，令 $f(t)$ 在 $t\geq 0$ 上有定义，对函数 $f(t)$ 进行 *Laplace* 变换是 $F(s)$，$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt$，函数 $F(s)$ 包含着在复平面 $(\mathrm{Re}\,s>\sigma)$ 上的参数 s，s 是一个复数，表现形式为 $s=\sigma+i\omega$，其中 σ，ω 为实数。且 $\left|f(t)\right|<Me^{\sigma t}$，其中 M，σ 为两个常实数，我们常称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的象函数，记为 $F(s)=L\left[f(t)\right]$，而 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的原函数。

定理3：设函数 $f(t)$ 在区间 $[0,+\infty]$ 上逐段连续，存在常数 $M>0$，$s_0\geq 0$，使得对于任意 $t\geq 0$，都有 $\left|f(t)\right|s_0t$，当 $s>s_0$ 时，$F(s)$ 存在。

定理4：设函数 $f(t)$ 及它的直到 $n-1$ 阶导数在 $[0,+\infty]$ 上连续，存在常数 $\mathrm{m}>0$，$s_0\geq 0$，使得对 $t\in[0,+\infty)$，有 $\left|f(t)\right|s_0t$，又设 $f^{n}(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在，并在 $[0,+\infty)$ 的每个有限子区间上逐段连续，则当 $s>s_0$ 时，导数 $f^{n}(t)$ 的 *Laplace* 变换存在，并且 $L\left|f^{n}(t)\right|=s^{n}L\left[f(t)\right]-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots f^{(n-1)}(0)$，$s>s_0$，考虑方程（1）满足初始条件：$y(0)=y_0$，$y'(0)=y_1$，…，$y^{(n-1)}(0)=y_{(n-1)}$ 的初值问题。先假设此初值问题的解满足定理4的条件，而 $f(x)$ 满足定理3的条件。

对 $f(x)$，$f(y)$ 作 *Laplace* 变换，$L\left[f(x)\right]=Y(s)$，$L\left[f(x)\right]=F(s)$，对（7）的两端进行 *Laplace* 变换，并注意到初始条件。

例8 求解方程 $x''+2x'+x=e^{-t}$，$x(1)=x'(1)=0$。

解：先令 $\tau=t-1$，将问题简化为 $x''+2x'+x=e^{-(\tau-1)}$，$x(0)=x'(0)=0$，对方程两边作拉普拉斯变换，得到 $s^2X(s)+2sX(s)+X(s)=\dfrac{1}{s+1}\cdot\dfrac{1}{e}$，则 $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)^3}\cdot\dfrac{1}{e}$，由拉普拉斯变换表可知 $x(\tau)=\dfrac{1}{2}\tau^2e^{-\tau-1}$，所以得解 $x(t)=\dfrac{1}{2}(t-1)^2e^{-t}$.

例9 求 $x''+a^2x=b\sin at$ 的解，$x(0)=x_0$，$x'(0)=x_0'$，其中 a，b 为非零常数。

解：对原方程进行拉普拉斯变换得

$s^2X(s)-x_0s-x_0'+a^2X(s)=\dfrac{ab}{s^2+a^2}$，得到

$$X(s)=\frac{ab}{\left(s^2+a^2\right)^2}+x_0\frac{s}{s^2+a^2}+x_0'\frac{1}{s^2+a^2}.$$

又 $\dfrac{ab}{\left(s^2+a^2\right)^2}=\dfrac{b}{2a}\left[\dfrac{1}{s^2+a^2}-\dfrac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right]$，则

$$X(s)=\frac{b}{2a}\left[\frac{a}{s^2+a^2}-a\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right]+x_0\frac{s}{s^2+a^2}+\frac{x_0'}{a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2},$$

由拉欧拉斯变换表可知方程的解为

$$x(t)=\frac{b}{2a^2}(\sin at-at\cos at)+x_0\cos at+\frac{x_0'}{a}\sin at$$

$$=\frac{1}{2a^2}\left[\left(b+2ax_0'\right)\sin at+a\left(2ax_0-bt\right)\cos at\right].$$

4. 欧拉方程

形如

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \quad (18)$$

的方程称为欧拉方程，a_1，a_2，…，a_n 为常数。微分方程中未知函数系数为实常数就是常系数微分方程，否则就是变系数微分方程，欧拉方程属于后者。解这类方程，一般需要把方程中的变量替换，把方程中的未知函数的系数转化为常数，再运用不同的解法对方程进行求解。

事实上，对这类方程求解的关键在于对其变量变换，所以我们可以对自变量进行变换，令 $x=e^t$，$t=\ln x$，代入方程（18）计算可以得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

按照这个步骤一直算下去，利用数学归纳法可知，有式子 $\frac{d^ky}{dx^k}=e^{-kt}\left(\frac{d^ky}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt}\right)$，$k$ 为任意自然数，其中的 β_1，β_2，……，β_{n-k} 都是常数。整理得

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k}=\frac{d^ky}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt}.$$

对其代入方程（18）中，便可得到常系数线性微分方程

$$\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0, \quad (19)$$

其中 b_1，b_2，b_{n-1}，b_n，现在我们就可以运用解常系数线性微分方程的方法解方程（19），得到解 t，又因为 $x=e^t$，便可得到方程（18）的通解。

根据以上对欧拉方程的推演，易知方程（19）定有形如 $y=e^{\lambda t}$ 的解，进而方程（18）便有形如 $y=x^\lambda$ 的解，由此我们可知，欧拉方程有解的形式为 $y=x^k$，我们把 $y=x^k$ 代入方程（18），而后约去 x^k，便能够得到方程（19）的特征方程，即

$$K(K-1)\cdots(K-n+1)+a_1K(K-1)\cdots(K-n+2)+\cdots+a_n=0. \quad (20)$$

所以易知，方程（20）的解为 K，假定 K 为 m 重实根，且 $K=K_0$，那么方程（20）的根 K 便对应方程（18）的 m 个解，即

$$x^{k_0},\ x^{k_0}\ln|x|,\ x^{k_0}\ln^2|x|,\ \cdots,\ x^{k_0}\ln^{m-1}|x|.$$

假定 K 为 m 重复根，那么方程（20）的根 $K=\alpha+i\beta$ 便对应方程（18）的 m 个实值解，即

$$x^a\cos(\beta\ln|x|),\ x^a\ln|x|\cos(\beta\ln|x|),\ \cdots,\ x^a\ln^{m-1}|x|\cos(\beta\ln|x|),$$

$$x^a\sin(\beta\ln|x|),\ x^a\ln|x|\sin(\beta\ln|x|),\ \cdots,\ x^a\ln^{m-1}|x|\sin(\beta\ln|x|).$$

例 10 求解 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0$.

解：首先令，得到特征方程 $K(K-1)-K+1=0$，得到特征根 $K_1=K_2=1$，易知原方程的基本解组为 x，$x\ln|x|$，所以方程的通解为 $y=(c_1+c_2\ln|x|)x$，其中 c_1，c_2 为任意常数。

例 11 求解 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+5y=0$。

解：首先令 $y=x^k$，有特征方程 $K(K-1)+3K+5=0$，得特征根 $K_{1,2}=-1+2i$，易知原方程的基本解组为 $x^{-1}\cos(2\ln|x|)$，$x^{-1}\sin(2\ln|x|)$，所以方程的通解为 $y=[c_1\cos(2\ln|x|)+c_2\sin(2\ln|x|)]x^{-1}$，其中 c_1，c_2 为任意常数。

5. 可降阶的微分方程

高阶微分方程的问题可以运用很多种方法来解决，并不局限于固定的解法。不论是齐次方程还是非齐次方程，我们都能够通过降阶来解决问题。降阶就是把高阶问题转变为低阶问题来解决，这是解决高阶微分方程的基本原则，这里总结了两类特殊的可降解的高阶微分方程的类型。形如 $F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0$，这样的方程为一般的 n 阶线性微分方程。

5.1 $F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0(1\le k\le n)$

此类方程没有明显含有未知数 x，可以用换元法，令 $x^{(k)}=y$，那原方程就变成了关于 y 的 $n-k$ 阶方程，即

$$F(t,y,y',\cdots,y^{(n-k)})=0. \quad (21)$$

要解出原方程就要求出方程（21）的解，假设求出方程（21）的解为 $y=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$，则有 $x^{(k)}=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$，经过 k 次积分便可得到 $x=\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$，显然 $x=\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 便是原方程的通解，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 都为任意常数。假定方程中没有明显含有未知数 y，则令 $y^{(k)}=x$，令方程变为关于 x 的方程。

例 12 求解 $\frac{d^5x}{dt^5}-\frac{1}{t}\cdot\frac{d^4x}{dt^4}=0$.

解：首先令 $\frac{d^4x}{dt^4}=y$，原方程变为 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{t}y=0$，经过积分得到 $y=ct$，即 $\frac{d^4x}{dt^4}=ct$，经过四次积分，得到通解 $x=c_1t^5+c_2t^3+c_3t^2+c_4t+c_5$，其中 $c_i(i=1,2,3,4,5)$ 为任意常数。

5.2 $F(x,x',\cdots,x^{(n)})=0$

此类方程不显含有自变量 t，运用上一类方程降阶

的方法，我们令 $x'=y$，代入方程计算，以 x 为新的自变量，这样方程便降一阶。

例13 求解 $xx''+(x')^2=0$。

解：首先令 $x'=y$，显然可以得到 $x''=y\dfrac{dy}{dx}$，带入原方程可得 $xy\dfrac{dy}{dx}+y^2=0$，解得 $y=0$ 或 $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$，再对 $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 积分可得 $y=\dfrac{c}{x}$，$x'=\dfrac{c}{x}$，所以原方程的通解为 $x^2=c_1t+c_2$，其中 c_1，c_2。

参考文献：

[1]王高雄，周之铭，朱思铭等.常微分方程（第3版）[M].北京：高等教育出版社，2006.

[2]尹秀玲.级数在一类高阶微分方程中的应用[J].兰州文理学院学报：自然科学版，2013，27（3）：19-21.

[3]庄万.常微分方程习题解[M].济南：山东科学技术出版社，2003.

[4]汤光宋.关于高阶微分方程的解法[J].西北大学学报（自然科学版），1983（01）：127-129.

[5]薛朦朦，武海辉.三个高阶微分方程的解法研究[J].数学学习与研究，2018.

[6]甘欣荣，甘泉.若干高阶微分方程的解[J].河北大学学报：自然科学版，2013，33（1）：5.