包含所有固定阶数k树作为子图的图的构造

翟冬阳　曾德炎
三亚学院　理工学院　海南三亚　572022

摘　要：图 G 是 k 树当且仅当 G 是一个顶点数为 $k+1$ 的完全图，或者在图 G 中能找到度为 k 的点 v，使得与 v 相邻的 k 个点构成的点集为团，且 G/v 也是一个 k 树。设 G 是一个 n 阶 k 树，其中 $n \ge k+1$，设 $n \equiv q \pmod{k+1}$，其中 $q=0,1,\dots,k$。本文对 $q=0$，$q=1$ 和 $2 \le q \le k$ 这三种情形，分别构造了三类图包含所有 n 个顶点的 k 树作为子图。
关键词：k 树；完全图；子图

Constructing graphs to containing every k-tree as a subgraph with prescribed size

Dong Yang ZHAI, De Yan ZENG

Abstract: A simple graph G is a k-tree if $G=K_{k+1}$, or G has a vertex whose neighborhood is a clique of order k, and G/v is also a k-tree. Let G be a k-tree on n vertices with $n \ge k+1$ and $n \equiv q \pmod{k+1}$ where $q=0,1,\dots,k$. In this paper, we construct three types of graph to containing every k-tree on n vertices as a subgraph based on $q=0$, $q=1$ and $2 \le q \le k$.
Keywords: k-tree; complete graph; subgraph

一、介绍

在本文中，我们用阶数表示图的顶点数。分别用P_m，K_m 和 $K_{m,n}$ 表示 m 个阶路，m 阶完全图 $m+n$ 阶阶完全二部图。设 $v \in V(G), X \subseteq V(G)$，我们用 $N_X(v)$ 表示在点集 X 中与点 v 相邻的所有点构成的集合。用 $G[X]$ 表示点集 X 在图 G 中的诱导子图。记 $G/v = G[V(G)/v]$，$G/X = G[V(G)/X]$。用 $K_m - E(H)$ 表示在 K_m 的基础上删除掉图 H 对应的边。在本文出现，未定义的标记参考文献[1]。

图 G 是 k 树当且仅当 $G=K_{k+1}$，或者在图 G 中能找到度为 k 的点 v，使得与 v 相邻的 k 个点构成的点集为团，且 G/v 也是一个 k 树。我们通常所说的树就是该定义中的1树。若 G 是 n 阶 k 树，则 G 的边数 $|E(G)| = \frac{k(k+1)}{2} + (n-k-1)k = kn - \frac{k(k+1)}{2}$。在 k 树中我们通常把度为 k 的顶点称之为耳朵。显然，对于任意一个 k 树 G，若 $G \ne K_{k+1}$，则 G 都能在某个 k 树 G' 的基础上增加一个新的顶点 u，让 u 的度为 k 且让 u 与 G' 中某顶点数为 k 的团中的顶点 $v_1,v_2,\dots,v_k$ 均相连构造而成。我们把过程称为将耳朵 u 粘贴到团 $\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$ 上。设 $T(k,n) = K_k \vee \overline{K_{n-k}}$，其中 $\overline{K_{n-k}}$ 是 $n-k$ 阶完全图 K_{n-k} 的补图，$\vee$ 表示两个图的交（也就是从这两个图中各任意找一个顶点，这两个顶点均是相邻的）。显然，$T(k,n)$ 是一个顶点数为 n，耳朵数为 $n-k$ 的 k 树，并且是同一个团被这 $n-k$ 个耳朵粘贴。如图1是 $T(3,6)$。显然 $T(3,6)$ 是一个顶点数为6的3树。$T(3,6)$ 有3耳朵，分别是 v_4,v_5,v_6，且均粘贴在团 $\{v_1,v_2,v_3\}$ 上。

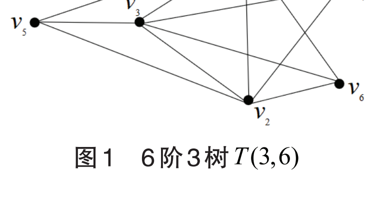

图1　6阶3树 $T(3,6)$

基金项目：海南省自然科学基金青年项目(编号;122QN335)；三亚学院科研项目（编号：USYQNZX21-54）

作者简介：
翟冬阳、1989、女、辽宁辽阳人、讲师、硕士、从事图论及其应用的研究；
曾德炎、1989、男、湖北荆州人、讲师、硕士。

设 G 是一个 n 阶2树，其中 $n\ge 3$，设 $k\equiv q(\mathrm{mod}3)$，其中 $q=0,1,2$。为了方便，我们设 $k=3p+q$，其中 $q=0,1,2$。对于 $q=0,1,2$，分别构造三类图如下：

当 $q=0$ 时，$G(3p)$ 构造如下：设 $V(K_{2p})=\{v_1,\dots,v_{2p}\}$，$G(3p)$ 是在 K_{2p} 的基础上增加新的顶点 $x_1,\dots,x_p$，连接 x_i（$1\le i\le p$）到 $v_1,\dots,v_{2i}$ 构造而成。当 $q=1$ 时。若 $p\ge 3$，$G(3p+1)$ 构造如下：设 $V(K_{2p+1})=\{v_1,\dots,v_{2p+1}\}$，$G(3p+1)$ 是在 $K_{2p+1}-v_{2p-2}v_{2p}$ 的基础上增加新的顶点 $x_1,\dots,x_p$，并且连接 x_i（$1\le i\le p$）到 $v_1,\dots,v_{2i}$ 构造而成。显然 $G(3p+1)$ 的顶点数为 $3p+1$。当 $q=2$ 时。若 $p\ge 2$，我们在 K_{2p+2} 的基础上构造 $G(3p+2)$ 如下：设 $V(K_{2p+2})=\{v_1,\dots,v_{2p+2}\}$，$G(3p+2)$ 是在 $K_{2p+2}-v_{2p}v_{2p+2}$ 的基础上增加新的顶点 $x_1,\dots,x_p$，连接 x_i（$1\le i\le p$）到 $v_1,\dots,v_{2i}$ 构造而成。显然 $G(3p+2)$ 的顶点数为 $3p+2$。

最近曾德炎[3, 4]证明了这三类图分别包含对应顶点数的所有2树作为子图，得到了下面三个定理：

定理1：设 G 是任意 n 阶2树，其中 $n=3p$，$p\ge 1$，则 G 是 $G(3p)$ 的子图。

定理2：设 G 是任意 n 阶2树，其中 $n=3p+1$，$p\ge 3$，则 G 是 $G(3p+1)$ 的子图。

定理3：设 G 是任意 n 阶2树，其中 $n=3p+2$，$p\ge 2$，则 G 是 $G(3p+2)$ 的子图。

设 G 是一个顶点数为 n 的 k 树，其中 $n\ge k+1$。设 $n\equiv q\,(\mathrm{mod}\,k+1)$，其中 $q=0,1,\dots,k$。为了方便，我们设 $k=pk+p+q$，其中 $q=0,1,\dots,k$。对于 $q=0$，$q=1$ 和 $2\le q\le k$ 这三种情形，我们分别构造 $G(k,pk+p)$，$G(k,pk+p+1)$ 和 $G(k,pk+p+q)$ 三类图如下：

当 $q=0$ 时，构造 $G(k,pk+p)$ 如下：设 $V(K_{pk})=\{v_1,v_2,\dots,v_{pk}\}$，$G(k,pk+p)$ 是在 K_{pk} 的基础上增加新的顶点 $x_1,\dots,x_p$，并且连接 x_i（$1\le i\le p$）到 $v_1,\dots,v_{ik}$ 构造而成。显然 $G(k,pk+p)$ 的顶点数为 $pk+p$。

当 $q=1$ 时，构造 $G(k,pk+p+1)$ 如下：设 $V(K_{pk+1})=\{v_1,\dots,v_{pk+1}\}$，$G(k,pk+p+1)$ 是在 $K_{pk+1}-v_{(p-1)k}v_{pk}$ 的基础上增加新的顶点 $x_1,\dots,x_p$，并且连接 x_i（$1\le i\le p$）到 $v_1,\dots,v_{ik}$ 构造而成。显然 $G(k,pk+p+1)$ 的顶点数为 $pk+p+1$。

当 $2\le q\le k$ 时，构造 $G(k,pk+p+1)$ 如下：设 $V(K_{pk+q})=\{v_1,\dots,v_{pk+q}\}$，$G(k,pk+p+q)$ 是在 $K_{pk+q}-v_{pk}v_{pk+q}$ 的基础上增加新的顶点 $x_1,\dots,x_p$，并且连接 x_i（$1\le i\le p$）到 $v_1,\dots,v_{ik}$ 构造而成。显然 $G(k,pk+p+1)$ 的顶点数为 $pk+p+q$。

我们将定理1–3中关于2树的结论推广到了 k 树，得到了相应的性质。定理4–6是本文的主要结论。

定理4：设 G 是一个顶点数为 $n=pk+p$ 的 k 树($p\ge 1$)。那么 $G(k,pk+p)$ 包含 G 作为子图。

定理5：设 G 是任意顶点数为 $n=pk+p+1$ 的 k 树($p\ge 3$)。那么 $G(k,pk+p+1)$ 包含 G 作为子图。

定理6：设 G 是任意顶点数为 $n=pk+p+q$ 的 k 树($p\ge 2$)，其中 $2\le q\le k$。那么 $G(k,pk+p+q)$ 包含 G 作为子图。

二、证明

为证明定理4–6，用到以下已知结论：

定理7[2]：设 G 是一个 n 阶的 k 树。则：

（1）G 中至少有两个耳朵；

（2）G 中度为 k 的顶点是 G 的耳朵；

（3）G 中不存在两个耳朵相邻，除非 $G=K_{k+1}$；

（4）G 中不包含长度至少为4的无弦圈；

（5）G 中不包含 K_{k+2}。

定理8[2]：k 树 G 中的任意一个团都可作为基础，通过不断粘贴耳朵将 G 构造出来。

为证明定理4–6，先证明下列会用到的引理：

引理1：设 G 是一个 n 阶的 k 树，其中 $n\ge k+2$。设 $v\in V(G)$，则存在一个 $n-1$ 阶 k 树包含 $G-v$ 作为子图。

证明：对 n 用归纳假设法。当 $n=k+2$ 时，因为 K_{k+1} 是唯一顶点数为 $k+1$ 的 k 树所以 $G-v$ 是其生成子图。因此引理1对于 $n=k+2$ 的情形是成立的。假设 $n\ge k+3$。若 v 是 G 的一个耳朵，则 $G-v$ 是一个 $n-1$ 阶 k 树，显然存在一个 $n-1$ 阶 k 树包含 $G-v$ 作为子图。现假设 v 不是 G 的耳朵，设 u 是 G 的一个耳朵。若 $v\in N_G(u)$，记 $G_1=G-u$，则 G_1 是一个 $n-1$ 阶 k 树。由 $N_G(u)\subseteq N_G(v)$，有 $G-v$ 是 $G-u$ 的一个子图。因此存在某个 $n-1$ 阶 k 树 G_1 包含 $G-v$ 作为子图。若 $v\notin N_G(u)$，由于 $G-u$ 是 $n-1$ 阶 k 树，根据归纳假设可知存在一个 $n-2$ 阶 k 树 G_2 包含 $G-\{u,v\}$ 作为子图。显然 $N_G(u)\subseteq V(G_2)$ 且 $G[N_G(u)]=K_k$。我们现在构造一个新图 G_3。G_3 是在 k 树 G_2 的基础上增加一个新的顶点 u_1 且让 u_1 与 $N_G(u)$ 中的每一个顶点都连边。也就是说 G_3 是 k 树 G_2 的基础上增加了一个耳朵 u_1。显然 G_3 是一个 $n-1$ 阶 k 树，且 $G-v$ 是 G_3 的生成子图。引理得证。

引理2：设 G 是一个 n 阶的 k 树，其中 $n\ge k+2$，设 $V'\subseteq V(G)$，其中 $|V'|=s\le n-k-1$。则存在一个 $n-s$ 阶 k 树包含 $G-V'$ 作为子图。

证明：对 s 用归纳假设法。由引理1可知，当

$s=1$时，定理2成立。假设$2\le s\le n-(k+1)$。设$v\in V'$，根据归纳假设可知存在某个$n-(s-1)$阶k树G_1包含$G-(V'-v)$作为子图。根据引理1，存在某个$n-s$阶k树G_2包含G_1-v作为子图。由$G-V'$是G_1-v的一个生成子图，很容易可以得到$G-V'$也是某个顶点数为$n-s$的k树G_2的生成子图。引理得证。

引理3：设G是一个n阶的k树，其中$n\ge 2k+4$。设u是G的一个耳朵u，则存在一个$n-k-1$阶k树T包含$G/(N_G(v)\cup\{v\})$作为子图，并且$T\ne T(k,n-k-1)$。

证明：设$\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$是G中所有耳朵所构成的集合，显然$m\ge 2$。对于任意$v\in\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$，记$H=G/(N_G(v)\cup\{v\})$。根据引理2有，存在某个$n-k-1$阶$k$树$T$包含$H$作为子图。我们用反证法证明，假设$T$只能为$T(k,n-k-1)$。我们先证明$H=T(k,n-k-1)$。

设$T(k,n-k-1)$的顶点集为$\{z_1,z_2,\ldots,z_k,w_1,w_2,\ldots,w_{n-2k-1}\}$，其中$\{z_1,z_2,\ldots,z_k\}$为一个团，$w_1,w_2,\ldots,w_{n-2k-1}$为粘贴到同一个团$\{z_1,z_2,\ldots,z_k\}$上的$n-2k-1$个耳朵。由$H$是$T(k,n-k-1)$的生成子图可知，对于任意$1\le p<q\le n-2k-1$都有$w_pw_q\notin E(H)$。若存在$1\le t\le n-2k-1$，使得$z_1w_t\notin E(H)$，则$H$是$k$树$T=T(k,n-k-1)-z_1w_t+w_mw_t$（$1\le m\le n-2k-1,m\ne t$）的生成子图，也就是说$H$是某个$k$树$T\ne T(k,n-k-1)$的生成子图，矛盾。因此对于任意$1\le t\le n-2k-1$，都有$z_1w_t\in E(H)$。同理，对于任意$2\le s\le k$，都有$z_sw_t\in E(H)$。若存在$z_iz_j\notin E(H)$，其中$1\le i<j\le k$，则$z_iz_j\notin E(G)$。因此存在$1\le p<q\le n-2k-1$，使得$w_pz_iw_qz_jw_p$是$k$树$G$中的一个边数为4的无弦圈，这与定理7（4）$k$树不含边数大于等于4的无弦圈矛盾。于是$z_iz_j\in E(H)$。

设$u\in\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$，且$u\ne v$，则$u\in V(H)$。若$u=z_i$，其中$1\le i\le k$。则$d_G(u)\ge k-1+n-2k-1\ge k+2>k$，这与定理7（2）$k$树中度为$k$的点为耳朵矛盾。若$u\in N_G(v)$，则$uv\in E(G)$，这与定理7（3）顶点个数大于$k+1$的$k$树的任意两个耳朵不相邻矛盾。因此$u\in\{w_1,w_2,\ldots,w_{n-2k-1}\}$。不是一般性，我们假设$u=w_1$。则$N_G(u)=\{z_1,z_1,\ldots,z_k\}$，并且$G/(w_1,z_1,z_2,\ldots,z_k)=T(k,n-k-1)$，并且$k$树$G/(w_1,z_1,z_2,\ldots,z_k)$的耳朵为$v,w_2,w_3,\ldots,w_{n-2k-1}$。设$x\in N_G(v)$。若存在$z_jx\notin E(G)$，其中$1\le j\le k$。则$xw_2z_jw_3x$为$k$树$G$中的一个边数为4的无弦圈，这与定理7（4）$k$树不含边数大于等于4的无弦圈矛盾。于是对于任意$1\le j\le k$和$x\in N_G(v)$，都有$z_jx\in E(G)$。也就是说$G[N_G(v)\cup\{z_1,z_1,\ldots,z_k\}]=K_{2k}$。因此$k$树$G$中包含$K_{k+2}$，这与定理7（5）$k$树不包含$K_{k+2}$矛盾。引理得证。

定理4的证明：设G是一个$pk+p$阶k树。我们对p用归纳假设法。若$p=1$，则$G(k,k+1)=K_{k+1}$，定理4成立。若$p\ge 2$，设u是G的一个耳朵，记$H=G/(N_G(u)\cup\{u\})$。由引理3可知存在某$(p-1)k+(p-1)$阶k树G'包含H作为子图。设$M=G(k,pk+p)/\{v_1,v_2,\ldots,v_k,x_1\}$。则$M=G(k,(p-1)k+(p-1))$。根据归纳假设，$(p-1)k+(p-1)$阶$k$树$G'$是$G(k,(p-1)k+(p-1))$的子图。由$G'$包含$H$作为子图可知$M$也包含$H$作为子图。将$N_G(u)$放置到点$v_1,v_2,\ldots,v_k$上，将$u$放置到点$x_1$上，可以得到$G(k,pk+p)$包含$G$作为子图。证毕。

在证明定理5之前，我们首先证明下面的引理。

引理4：设G是$2k+3$阶k树，其中$G\ne T(k,2k+3)$。则G是$G(k,2k+3)$的子图。

证明：设u是G的一个耳朵，设$N_G(u)$被其他$s-1$个耳朵$u_1,u_2,\ldots,u_{s-1}$粘贴。记$N_G(u)=\{w_1,w_2,\ldots,w_k\}$都有。我们假设$s\ge 2$。记$H=G/(N_G(u)\cup\{u,u_1\})$。若对于任意$1\le i\le k$，都有$|N_H(w_i)|=k+1$，则$|E(H)|=0$。因此$G=T(k,2k+3)$，矛盾。不失一般性，我们假设$|N_H(w_k)|<k+1$。记$M=G(k,2k+3)/\{v_1,v_2,\ldots,v_k,x_1,x_2\}$，则$M=K_{k+1}$，显然$M$包含$H$作为子图。将$u$放置到点$x_1$上，将$w_1,w_2,\ldots,w_k$放置到$v_1,v_2,\ldots,v_k$，即可得到$G(k,2k+3)$包含$G$作为子图。假设$s=1$，记$H_1=G/(N_G(u)\cup\{u\})$，根据引理2，$H_1$是某个$k+2$阶$k$树$G'$的子图。由于$k+2$阶$k$树只有$T(k,k+2)$，所以$G'=T(k,k+2)$。设$V(G')=Y\cup\{z_1,z_2\}$，其中$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_k\}$是$G'$中的团被$G'$中的耳朵$z_1,z_2$所粘贴。设$w$是$N_G(u)$中的任意点，我们接着证明$|N_Y(w)|<k$。

假设$|N_Y(w)|=k$。若存在$1\le i,j\le k$使得$y_iy_j\in E(H_1)$，我们很容易看到$G[(N_G(u)\cup\{y_i,y_j\}]=K_{k+2}$，则$G$中包含$K_{k+2}$，这与定理7（5）$k$树中不包含$K_{k+2}$矛盾。因此$E(H[Y])=\varnothing$。假设$|N_Y(z_1)|\ge 2$。若$w_i\in N_G(z_1)$，其中$1\le i\le k$，则$G$中包含$K_{k+3}-E(K_2)$，从而$G$中包含$K_{k+2}$，这与定理7（5）$k$树中不包含$K_{k+2}$矛盾。不失一般性，我们让$w_1\notin N_G(z_1)$和$y_1y_2\in N_G(z_1)$。由$z_1w_1,y_1y_2\notin E(G)$，我们有$z_1y_1w_1y_2z_1$是$G$中的一个长度为4的无弦圈，这与定义7（4）$k$树中不包含长度大于等于4的无弦圈矛盾。因此$|N_Y(z_1)|\le 1$，同理$|N_Y(z_2)|\le 1$。于是存在$y\in Y$使得$y$是$G$中满足$N_G(y)=N_G(u)$的一个耳朵，这与$s=1$矛盾。所以$|N_Y(w)|<k$。

不失一般性，我们假设 $|N_Y(w_k)|<k$。令 $M_1=G(k,2k+3)/\{v_1,v_2,\ldots,v_k,x_1\}$。则 $M_1=T(k,2k+3)$ 且包含 H 作为子图。让 $u=x_1$，$w_i=v_i,i=1,2,\ldots,k$ 以及 $z_2=x_2$，很容易得到 $G(k,2k+3)$ 包含 G 作为子图。

定理5的证明：设 G 是一个 $pk+p+1$ 阶 k 树（$p\ge 3$）。我们对 P 用归纳假设法。设 u 是 G 的一个耳朵，记 $H=G/(N_G(u)\cup\{u\})$。根据引理3可知，存在某个顶点数为 $(p-1)k+(p-1)+1$ k 树 T 包含 H 作为子图，且 $T\ne T(k,(p-1)k+(p-1)+1)$。令 $M=G(k,pk+p+1)/\{v_1,v_2,\ldots,v_k,x_1\}$。当 $p=3$ 时，$M=G(k,2k+3)$。由引理4可知 M 包含 H 作为子图。让 $u=x_1$，$N_G(u)=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$，很容易得到 $G(k,pk+p+1)$ 包含 G 作为子图。若 $p\ge 4$，则 $M=G(k,(p-1)k+(p-1)+1)$。根据归纳假设，T 是 M 的子图，于是有 H 也是 M 子图。同样，让 $u=x_1$，$N_G(u)=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$，很容易得到 $G(k,pk+p+1)$ 包含 G 作为子图。

在证明定理5之前，我们首先证明下面的引理。

引理5：设 G 是一个阶 $k+1+q$ k 树，其中 $2\le q\le k$ 且 $G\ne T(k,k+1+q)$。则 G 是 $G(k,k+1+q)$ 的子图。

证明：设 u 是 G 的一个耳朵，设 $N_G(u)=\{w_1,w_2,\ldots,w_k\}$，记 $H=G/(N_G(u)\cup\{u\})$。如果对于任意 i $(1\le i\le k)$，均满足 $|N_H(w_i)|=q$，则 $G=T(k,k+1+q)$，矛盾。因此，存在 $1\le i\le k$，使得 $|N_H(w_i)|<q$。不失一般性，假设 $|N_H(w_k)|<q$。设 $M=G(k,k+1+q)/\{v_1,v_2,\ldots,v_k,x_1\}$，则 $M=K_q$，因此 M 包含 H 作为子图。将 $u,w_1,w_2,\ldots,w_k$ 对应放置到 $x_1,v_1,v_2,\ldots,v_k$ 上，很容易看到 $G(k,k+1+q)$ 包含 G 作为子图。

定理6的证明：设 G 是一个 $pk+p+q$ 阶 k 树，其中 $p\ge 2$，$2\le q\le k$。我们对 p 用归纳假设法。设 u 是 G 的一个耳朵，记 $H=G/(N_G(u)\cup\{u\})$。记 $M=G(k,pk+p+q)/\{v_1,v_2,\ldots,v_k,x_1\}$。当 $p=2$ 时，$M=G(k,k+1+q)$。根据引理3，存在某个顶点数为 $(p-1)k+(p-1)+q$ 的 k 树包含 H 作为子图，且 $H\ne T(k,(p-1)k+(p-1)+q)$。根据引理5可知 H 是 M 的子图。将 $N_G(u)$ 放置到 $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ 上，将 u 对应放置到 x_1 上，我们可以得到 $G(k,pk+p+q)$ 包含 G 作为子图。若 $p\ge 3$，则 $M=G(k,(p-1)k+(p-1)+q)$。根据归纳假设 M 包含所有 $(p-1)k+(p-1)+q$ 阶 k 树作为子图，从而也包含 H 作为子图。同样将 $N_G(u)$ 放置到 $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ 上，将 u 对应放置到 x_1 上，我们可以得到 $G(k,pk+p+q)$ 包含 G 作为子图。

参考文献：

[1] J.A. Bondy, U.S.R. Murty.Graph Theory With Applications[M]. London：The Macmillan Press：1976.

[2] D.Y. Zeng, J.H. Yin.On a characterization of k–trees[J]. Czech. Math. J.，2015，65（140）：361–365.

[3] 曾德炎，翟冬阳，关于2树子图的一些性质[J].黑龙江科学，2021，14：35–39.

[4] 曾德炎，翟冬阳，包含所有固定阶数2树作为子图的图的构造[J].科技风，2021，28：10–12.