最优化理论与方法综述

刘傲多
长春建筑学院基础教学部　吉林长春　13000

摘　要：最优化理论与方法是常见的选择最优方案来解决决策问题的一种有效的方法。即在给定的条件下，求函数的极值。最优化问题可以分为矩阵优化问题、仿生优化、非光滑优化，多非凸优化等。本文简述了同伦方法的发展历程及基本思想，主要涉及多目标优化、非光滑优化以及矩阵优化。

关键词：同伦方法；法锥条件；组合同伦

Overview of optimization theory and methods

Aoduo Liu
Basic Teaching Department of Changchun Institute of architecture Changchun 13000, China

Abstract: optimization theory and method is a common and effective method to choose the optimal scheme to solve decision-making problems. That is, under the given conditions, find the extreme value of the function. Optimization problems can be divided into matrix optimization problems, bionic optimization, nonsmooth optimization, multi Nonconvex Optimization and so on. In this paper, the development and basic idea of homotopy method are briefly introduced, mainly involving multi-objective optimization, nonsmooth optimization and matrix optimization.

Keywords: homotopy method; Normal cone condition; Combinatorial homotopy

引言：

同伦方法即路径跟踪方法其实在其本质上可以看作是一种数值方法。同时路径跟踪方法也是一个有效工具，用来证明非线性问题解存在性的。早期的同伦方法的不足之处在于其不具有构造性。考虑将同伦方法优化成一种具有构造性的方法—参数微分法早在20世纪50年代就得以实现。早期的同伦方法仅仅考虑了局部收敛性而没有考虑全局收敛性，从而无法达到全局收敛的效果。在提出了连续模拟迭代法后。又有学者利用连续化的方法，证明了不动点定理。并在此基础上，路径跟踪方法无法达到全局收敛性的问题也得到了解决。其后为解决凸优化问题构造了一种新的较为有效的同伦算法，该方法可以求解凸优化问题。至此对于同伦方法理论的研究也开始迅速的发展。同伦方法的应用也非常广泛，其广泛地应用于解决非线性方程组的问题、路径跟踪、非线性优化的问题以及变分不等式的问题等诸多问题中。

20世纪80年代为了求解线性规划问题，有学者提出了一种新的方法。该方法具有多项式复杂度。并且该方法在其本质上也可以被认为是一种路径跟踪方法或者是内点法。这种方法重新引起了学术界对优化内点法的研究，以及与其相关的其他路径跟踪方法的研究[1]。近年来，在两种同伦方法（牛顿同伦和不动点同伦）的基础上又提出了组合同伦内点法（Combined Homotopy Interior Point Method，简称CHIP方法）。其中凸的可行域是一定满足法锥条件（可行域边界满足的条件）的约束区域，在文献[2]中给出了说明。在文献[6]中对法锥条件进行削弱，分别给出了与这两种条件两种相对应的同伦方程。本文介绍了矩阵优化、多目标优化以及几种非光滑优化的方法，并对这些方法进行了分析。

1　矩阵优化

目标函数中含有矩阵变量，或者是约束函数中含有矩阵约束函数的一类优化问题称之为矩阵优化问题（$f:R^n \to R^{m\times p}$）。这类优化问题常在经济计算、金融计算以及工程计算等领域中有着重要的应用。其中矩阵优

作者简介：刘傲多（1994—），女，汉族，吉林长春人，职称：助教，学历：硕士研究生，单位：长春建筑学院基础教学部，邮编：130000，研究方向：运筹学。

化的一项十分有意义的研究内容就是观测矩阵。然而已有的观测矩阵具有重构精度低以及不稳定等不足之处。这是没与重构效果关联的原因。所以有学者经过大量研究，提出了利用标准蝙蝠算法来优化观测矩阵。从而解决了已有的观测矩阵具有重构精度低以及不稳定的不足。提高了信号的重构效果。

2　多目标优化

多目标优化问题就是有两个及两个以上的目标函数，如何能够使得多个目标尽可能地同时达到最优，从而从中选择满足多个目标最优的实施方案。实际生活中大部分的实际问题都要求多个目标能够尽可能地达到最优。

多目标优化的数学描述如下：

$$(VP)\min(f_1(x),f_2(x),\dots f_p(x))^T$$
$$s.t.\quad g_i(x)\le 0,\quad i=1,\dots,m$$
$$\mathrm{h}_j(x)=0,\quad \mathrm{j}=1,\dots,l$$

多目标优化问题有多方面的研究，其中对于研究多目标优化问题最优解的概念以及性质，给出了一种特殊的有效解，该多目标最优化的有效解称为KT–有效解。其后给出了新的有效解称为G–有效解，该有效解是对多目标优化的有效解进行限制之后得到的。随后又借助了投影锥，得出了P–真有效解。其次研究多目标优化问题的方向还包括多目标优化问题解法。多目标优化问题的解法包括：传统解法、进化解法。另外，还有一种多目标优化问题是研究不光滑多目标优化问题的。还有些学者在各个不同的方面，均对非光滑多目标优化问题进行了细致的研究。同时也取得了很多重要的成果。最后一种研究多目标优化问题的方向是研究如何解决对偶问题的。其研究的对偶问题包括：Lagrange对偶、共轭对偶。

3　非光滑优化

若一个优化问题中约束函数（目标函数）含有不光滑的函数，则称该问题为非光滑的优化问题。

给出如下的优化问题

$$\min_{x\in Y} f(x)$$

若距离函数定义为

$$dist(x,Y)=\min_{y\in Y}\|y-x\|$$

则由罚函数定理可知，这个优化问题可在一定条件下等价于

$$\min_{x\in R^n} f(x)+\sigma dist(x,Y)$$

这样就将有约束变成了无约束。其中罚函数为$\sigma>0$。

对于光滑的优化问题可以通过梯度、共轭梯度、投影梯度等获得优化问题中每一点的下降方向。而非光滑优化问题相比光滑优化问题而言其下降方向的求解要困难很多。因为非光滑优化问题中次梯度的计算相比光滑优化问题中梯度的计算要较为困难，而且非光滑优化问题中负次梯度的方向有可能是上升方向，故想要实现非光滑优化问题的迭代点下降就非常困难。

目前已有的求解非光滑优化问题的方法，都是没有借助光滑点求解的方法。对于一个函数而言，分为局部光滑和全局光滑。本文以分片光滑的函数为例，其局部就是具有光滑性的。对于分片光滑函数这种局部具有光滑性的函数就可以充分利用这些光滑点来解决优化问题。本文简述同伦方法的发展历程及基本思想，介绍几种非凸可行域的边界限制条件，给出在这几种边界限制条件下的组合同伦方法。

3.1同伦方法简述

为解非线性方程组

$$F(x)=0$$

其中$x\in R^n$，$F:R^n\to R^n$是光滑的映射，构造含有参数t的一个映射$H(x,t):R^n\times[0,1]\to R^n$

使得$H(x,1)=G(x)$，$H(x,0)=F(x)$

并且假定方程$G(x)=0$的解$x^{(0)}$是已知的，映射$H(x,t)$称为同伦映射。

同伦方程$H(x,t)=0$在一定条件下能够确定一条从$(x^{(0)},1)$出发的，趋于超平面$t=0$的光滑曲线，该曲线即为同伦路径。

3.2组合同伦内点法及同伦方程

考虑非凸规划问题

$$\min_{x\in X} f(x)$$
$$s.t.\ g_i(x)\le 0,\ i=1,\dots,m$$

其中，$x\in R^n$，f，$g_i(i=1,\dots,m)$充分光滑，$X=\{x\in R^n|g_i(x)\le 0,i=1,\dots,m\}$为可行域，$X^o=\{x\in R^n|g_i(x)<0,i=1,\dots,m\}$为严格可行域，$\partial X=X\setminus X^o$为可行域边界，$I(x)=\{i|g_i(x)=0,i=1,\dots,m\}$为紧指标集。

假定下面两个条件成立：

（A_1）Slater’s条件：X为有界连通集，X^o非空。

（A_2）边界正则性条件：$\forall x\in\partial X$，$\{\nabla g_i(x)|i\in I(x)\}$线性独立。

为研究非凸规划问题，文献[1]给出了法锥条件并构造了新的同伦，称为组合同伦。

定义3.1（法锥条件[3]）若∃非空闭子集X，设

$$N(x)=\left\{\sum_{i\in I(x)} y_i\nabla g_i(x)\middle|y_i\ge 0,i\in I(x)\right\}$$

对 $\forall x \in \partial X$，点 x 处的外法锥与 X 相较于 x，即 $\{x+N(x)\} \cap X=\{x\}$，则称 X 满足法锥条件。则其条件下的组合同伦方程为

$$H(\omega,\omega^{(0)},t)=\begin{pmatrix}(1-t)(\nabla f(x)+\sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(x))+t(x-x^{(0)})\\ Yg(x)-tY^{(0)}g(x^{(0)})\end{pmatrix}$$

其中，$Y=diag(y_i)$，$x^{(0)} \in X^o$，$y^{(0)} \in R_{++}^m$。

定义3.2（弱法锥条件） 若∃非空闭子集 $\hat{X} \subset X^o$，对 $\forall x \in \partial X$，若 X 于 x 的外法锥和 $\hat{X}$ 不相交，即 $\{x+\sum_{i \in I(x)} y_i \nabla g_i(x) | y_i \geq 0\} \cap \hat{X}=\varnothing$，则称 X 关于 $\hat{X}$ 满足弱法锥条件。要求初始点 $x^{(0)}$ 在 $\hat{X}$ 内选取，具有一定的局限性。

定义3.3　如果光滑映射 $\eta_i(i=1,\ldots,m): R^n \rightarrow R^n$ 满足 $\forall x \in \partial X$

$$\sum_{i \in I(x)}(y_i \nabla g_i(x)+\alpha_i \eta_i(x))=0,\ y_i \geq 0,\ \alpha_i \geq 0$$

必有 $y_i=0$，$\alpha_i=0(i \in I(x))$，

称 $\eta(x)=(\eta_1(x),\eta_2(x),\ldots,\eta_m(x))$ 关于 $\nabla g(x)$ 正独立。

定义3.4（拟法锥条件[4]） 若存在关于 $\nabla g(x)$ 正独立的光滑映射 $\eta_i(x)(i=1,\ldots,m)$，且满足 $\forall x \in \partial X$，

$$\{x+\sum_{i \in I(x)} \alpha_i \eta_i(x) | \alpha_i \geq 0, i \in I(x)\} \cap X^o=\varnothing$$

则称 X 关于 $\eta(x)$ 满足拟法锥条件。

其中 $\forall x \in \partial X$，至少存在一条从 x 出发的射线不与 X^o 相交是非凸可行域 X 满足拟法锥的必要条件。则其条件下的组合同伦方程为

$$H(\omega,\omega^{(0)},t)=\begin{pmatrix}(1-t)(\nabla f(x)+\sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(x)+\sum_{i=1}^{m} t y_i^2 \eta_i(x))+t(x-x^{(0)})\\ Yg(x)-tY^{(0)}g(x^{(0)})\end{pmatrix}$$

定义3.5　若映射 $\eta_i(x,z_i)(i=1,\ldots,m): R^n \times R \rightarrow R^n$ 满足

（1）$\eta_i(x,z_i)$ 在 $\hat{X}_i \times R_+$ 上是连续可微的；

（2）$\eta_i(x,0)=0$，且 $\forall x \in \partial X$，$\eta_i(x,z_i)=0 \Leftrightarrow z_i=0$；

（3）$\forall x \in \partial X_i$，$\lim_{z_i \rightarrow \infty}\|\eta_i(x,z_i)\|=\infty$

则 $\eta_i(x,z_i)$ 称为 $\hat{X}_i$ 的毛发映射。

定义2.6　设 $\eta_i(x,z_i)$ $(i=1,\ldots,m)$ 均是 $\hat{X}_i$ 的毛发映射，如果 $\forall x \in \partial X$

（1）$\sum_{i \in I(x)}(y_i \nabla g_i(x)+\eta_i(x,z_i))=0$，$y_i \geq 0$，$z_i \geq 0$，必有 $y_i=0$，$z_i=0$

（2）若 $\|(y,z_i)\| \rightarrow \infty$，有

$$\left\|\sum_{i \in I(x)}(y_i \nabla g_i(x)+\eta_i(x,z_i))\right\| \rightarrow \infty$$

则称 $\eta(x,z)=(\eta_1(x,z_1),\ldots,\eta_m(x,z_m))$ 关于 X 的与 $\nabla g(x)$ 相容的毛发映射。

定义2.7（伪锥条件） 若存在关于 X 的与 $\nabla g(x)$ 相容的毛发映射 $\eta(x,z)$，且满足 $\forall x \in \partial X$，

$$\{x+\sum_{i \in I(x)} \eta_i(x,z_i) | z_i \geq 0\} \cap X^o=\varnothing$$

则称 X 关于 $\eta(x,z)$ 满足伪锥条件。

伪锥条件下构造同伦方程

$$H(\omega,\omega^{(0)},t)=\begin{pmatrix}(1-t)\left(\nabla f(x)+\sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(x)\right)+\sum_{i=1}^{m} \eta_i(x,t(1-t)y_i^2)+t(x-x^{(0)})\\ Yg(x)-tY^{(0)}g(x^{(0)})\end{pmatrix}$$

给出凝聚函数表达式

$$\bar{g}_\theta(x,t)=\theta t \sum_{i=1}^{m} \exp(g_i(x)/\theta t),\quad \theta \in[0,1]$$

当凝聚约束区域

$$X_\theta(t)=\left\{x \in R^n \middle| \bar{g}_\theta(x,t) \leq 0, \theta \in[0,1]\right\}$$

则其凝聚条件下的组合同伦方程为

$$H(x,y,t)=\begin{pmatrix}(1-t)(\nabla f(x)+y\nabla_x \bar{g}_0(x,t))+t(x-x^{(0)})\\ y\bar{g}_\theta(x,t)-ty^{(0)}\bar{g}_\theta(x^{(0)},1)\end{pmatrix}$$

另一种凝聚函数表达式

$$g(x,\mu)=\mu \ln\left[\sum_{i=1}^{m} \exp(g_i(x)/\mu)\right]$$

相应的凝聚组合同伦方程

$$H(\omega,\mu)=\begin{pmatrix}(1-\mu)\left(\nabla f(x)+\sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(x)+\sum_{j=m+1}^{m+p} y_i \nabla h_i(x,t_0\mu)+\mu(x-x^{(0)})\right)\\ Yg(x)-\mu Y_1^{(0)}g(x^{(0)})\\ Y_1h(x,t_0\mu)-\mu Y_1^{(0)}h(x^{(0)},t_0)\end{pmatrix}$$

凝聚同伦方法是先进行凝聚，凝聚优化问题中的约束函数，再借助凝聚函数把多个约束函数变为一个约束函数，减少了约束函数的个数。从而不仅降低了问题的求解规模而且减少了乘子的个数。

文献[5]给出了一个含有不等式约束的动约束组合同伦方法引入满足一定条件的函数 $\tilde{g}(x,t)$。其可行区域记为

$$X(t)=\left\{x \middle| g_i(x,t) \leq 0, i=1,\ldots,m\right\}$$

则动约束组合同伦方程为

$$H(x,y,t)=\begin{pmatrix}(1-t)(\nabla f(x)+\nabla_x \tilde{g}(x,t)y+t(x-x^{(0)}))\\ Y\tilde{g}(x,t)-tY^{(0)}\tilde{g}(x^{(0)},1)\end{pmatrix}$$

该方法仅仅要求可行域 X 能够从一个满足法锥条件

的集合，进行连续的变形，通过连续形变得到。不需可行域 X 本身满足法锥条件。对于约束的形变更容易实现。

本文简述同伦方法的发展历程及基本思想，并简单介绍了几种最优化理论的方法，其中包括矩阵优化、多目标优化以及非光滑优化的基本内容。其中重点介绍了几种非光滑优化问题的求解方法，并对这几种方法进行了分析。最优化理论与方法在很多数学问题中起了重要的作用，所以对最优化理论与方法的研究也是十分重要，尤其是对于非光滑优化问题的研究尤为重要。

参考文献：

[1]贺莉，刘庆怀.多目标优化理论与连续化方法[M].科学出版社，2015.

[2]刘庆怀.非凸域上函数极小化问题的组合同伦方法[J].长春工业大学学报，2012，33（5）：605-610.

[3]Guochen F , Zhenghua L , Bo Y . Existence of an interior pathway to a Karush-Kuhn-Tucker point of a nonconvex programming problem[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 1998, 32(6):761-768.

[4]刘庆怀，于波，冯果忱.基于拟法锥条件的非凸非线性规划问题的同伦内点法[J].应用数学学报，2003，26（2）：372-377.

[5]于波，商玉凤.解非凸规划问题动边界组合同伦方法[J].数学研究与评论：英文版，2006，26（4）：831-834.

[6]刘庆怀，张春阳，张树功.弱拟法锥条件下非凸优化问题的同伦算法[J].应用数学学报，2011，34（6）：996-1006.