

不确定参数作用下的非线性系统的分岔研究

许鹏翔 许界科

北方民族大学数学与信息科学学院 宁夏银川 750021

摘要: 本文应用Chebyshev多项式逼近法研究了谐和激励作用下带有不确定随机参数的非线性系统的分岔现象。此类信息系统设计首先被转化成与其等价的确定性扩阶系统, 然后通过数值分析方法求得系统响应。最后通过分析研究了在不确定随机参数作用下Duffing-van der Pol系统丰富的分岔现象。

关键词: Duffing van der Pol系统; 鞍结分岔; 倍周期分岔; Chebyshev多项式逼近

Analysis of Bifurcation in Duffing-van der Pol System Effect by Random Parameter

Pengxiang Xu, Jieke Xu

Department of Information & Computation Sciences, , Yinchuan 750021 P.R. China

Abstract: Chebyshev polynomial approximation is applied to the bifurcation problem of a stochastic Duffing-van der Pol system with bounded random parameters and subject to harmonic excitations. The stochastic system is first reduced into its equivalent deterministic one, then through which the responses of the stochastic system can be obtained by numerical methods. Nonlinear dynamical behavior related to various forms of stochastic bifurcation in the stochastic system is explored. Numerical simulations show that similar to their counterpart in deterministic nonlinear systems various forms of bifurcation may occur in the stochastic Duffing-van der Pol system.

Keywords: Duffing-van der Pol system, saddle-node bifurcation, period-doubling bifurcation, Chebyshev polynomial approximation

引言:

非线性随机动力系统的随机性主要来自两个方面: 一方面是外部激励的随机性, 另一方面是系统参数的随机性。半个世纪发展以来, 随机外激激励作用下非线性随机动力系统的研究有了很大进展, 并形成了一个比较成熟的分析方法, 如随机平均法^[1], 多尺度法^[2], 胞映射法^[3]等。虽然这些成果进一步改进了非线性随机动力系统的研究, 但是在实际模型的建立过程中还存在一个极其重要的问题, 即系统自身的随机性。与确定性系统相比, 该系统模型可以更好的表达出系统的动态特性, 因此对动态响应、复杂性、随机分岔、混沌等方面的研究

在实际工程问题中具有非常重要的应用价值。由于数学处理上的困难, 目前研究此类动力学系统的工程应用问题还较少, 考虑物理参数本身具有随机特性的研究则大都局限在静力分析、结构稳定及动力特征值等方面^[4]。因此具有随机参数的非线性随机系统的动态响应、复杂性、随机分岔、混沌等方面的研究在实际工程问题中具有重要的研究价值。本文将这种具有随机参数的非线性系统称为非线性随机参数系统, 由于研究方法的尚不成熟, 因此此类问题的研究还较少。传统的随机模拟法需要极大的计算量, 摄动法则对变量有较高的要求, 近年来发展起来的正交展开逼近法克服了以上两种方式方法的缺陷, 更适合研究随机参数系统的响应。2002年, 李杰等^[5]对线性随机结构在随机激励下的响应问题应用正交展开理论进行了分析研究。2003年, Fang将正交多项式逼近法和统一解法相结合, 研究了随机激励下一系列具备随机参数的线性系统的响应效果。继而, 冷小磊又

基金项目: 国家级大学生创新训练计划项目 (G2021-11407-013)

作者简介: 许鹏翔 (2001—), 男, 就读于北方民族大学数学与信息科学学院。

将正交多项式逼近法应用到具有一个随机参数的谐和激励作用下非线性随机参数系统的研究。随后马少娟又使用了第二类 Chebyshev 多项式逼近法研究了具有拱形分布特征的随机参数的 Duffing-van der Pol 系统的倍周期分岔, 并进一步指出了随机参数系统具有倍周期分岔的特性。近年来, 马少娟、郭祥、曾春梅针对随机参数影响下的非线性系统的稳定性、Hopf 分岔及控制等问题做了深入的研究。在此基础上, 此类系统的研究正受到学者的关注, 本文基于此, 利用正交多项式逼近分析了含有随机参数非线性系统的分岔行为。

一、Chebyshev 多项式

实际上, 工程相关问题中的随机性参数是有界的。因此这些参数比较适用拱形概率密度函数, 如图 1, 其表达式为:

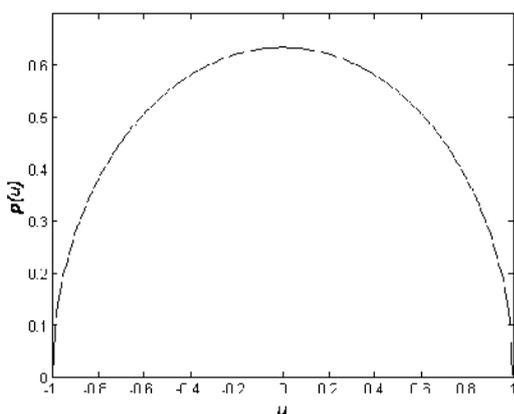


图 1 随机变量 u 的拱形概率密度函数图

$$p(u) = \begin{cases} (2/\pi)\sqrt{1-u^2} & |u| \leq 1 \\ 0 & |u| > 1 \end{cases} \quad (1)$$

根据这类概率密度函数, 可选择 Chebyshev 多项式中的第二类正交多项式作为正交多项式基。它的表达式为:

$$U_n(u) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (2u)^{n-2k} \quad (2)$$

从而, 可有

$$\begin{aligned} U_0(u) &= 1 \\ U_1(u) &= 2u \\ U_2(u) &= 4u^2 - 1 \\ U_3(u) &= 8u^3 - 4u \\ U_4(u) &= 16u^4 - 12u^2 + 1 \\ &\dots \end{aligned} \quad (3)$$

由 (2) (3) 式得第二类 Chebyshev 多项式的推导公式为:

$$uU_n(u) = \frac{1}{2}(U_{n-1}(u) + U_{n+1}(u)) \quad (4)$$

第二类 Chebyshev 多项式正交性可表示为:

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{\pi} \sqrt{1-u^2} U_i(u) U_j(u) du = \begin{cases} 1, & (i=j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases} \quad (5)$$

方程 (5) 代表了一种加权正交关系。由于加权函数正好符合拱形概率密度函数, 方程 (1) 中的 $p(u)$, 方程 (5) 左侧近似看作是 $U_i(u)U_j(u)$ 乘积的期望。由于 (5) 式, 任何可测函数 $f(u) \in L^2$ 可以表示为: $f(u) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i U_i(u)$, 其中 $c_i = \int_{-1}^1 p(u) f(u) U_i(u) du$ 。我们也可以得到具有多个相互独立随机变量的可测函数类似的展开式。此类表达式记作 $f(u)$ 的正交分解, 它是正交分解的理论基础。

二、随机系统的 Chebyshev 多项式逼近

本文考虑一个单自由度谐和激励作用下具有有界随机参数的非线性系统, 其动力学微分方程为:

$$\ddot{x} + (a + cx^2)\dot{x} + bx^3 = f(t) \quad (6)$$

其中 a, c 为常数, b 是一个随机参数, $f(t) = F \cos(\omega t)$ 为谐和激励。随机参数 b 表示为

$$b = \bar{b} + \delta u \quad (7)$$

\bar{b} 和 $\delta/2$ 分别为 b 的均值和方差; U 被定义为 $[-1, 1]$ 上适用于拱形分布特征的概率密度函数的随机变量。根据正交多项式逼近理论, 系统 (6) 的响应可以表示为:

$$x(t, u) = \sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u) \quad (8)$$

其中 $U_i(u)$ 表示 Chebyshev 多项式的第 i 项, N 表示 Chebyshev 多项式的最大个数,

$$x_i(t) = \int_{-1}^1 p(u) x(t, u) U_i(u) du.$$

将 (7) 式和 (8) 式带入 (6) 式, 可得

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} \right) \sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u) + \frac{1}{3} c \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u) \right)^3 + \bar{b} \left(\sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u) \right)^3 + \delta u \left(\sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u) \right)^3 = f(t). \quad (9)$$

(9) 式等号左边的非线性项 $\left(\sum_{i=0}^N x_i(x) U_i(u) \right)^3$ 可以展开为

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u) \right)^3 &= x_0^3(t) U_0^3(u) + \dots + x_N^3(t) U_N^3(u) + 3x_0^2(t)x_1(t)U_0^2(u)U_1(u) + \dots \\ &+ 3x_{N-1}(t)x_N^2(t)U_{N-1}(u)U_N^2(u) + 6x_0(t)x_1(t)x_2(t)U_0(u)U_1(u)U_2(u) + \dots \\ &+ 6x_{N-2}(t)x_{N-1}(t)x_N(t)U_{N-2}(u)U_{N-1}(u)U_N(u). \end{aligned} \quad (10)$$

根据公式 (4), (10) 式中多项式的三项乘积可以进

一步约化成相关单个多项式的线性组合。对于Chebyshev多项式 $U_i(u)$ ，我们有以下结论

$$\begin{aligned} U_0^3 &= U_1 \\ 3U_0^2U_1 &= 3U_1 \\ 3U_1^2U_2 &= 3U_4 + 6U_2 + 3U_0 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (11)$$

通过定义线性组合中 $U_i(u)$ 的系数为 $X_i(t)$ ，(10)式最终可以等价于

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^N x_i(t)U_i(u)\right)^3 &= X_0(t)U_0(u) + \dots + X_N(t)U_N(u) \\ &= \sum_{i=0}^{3N} X_i(t)U_i(u) \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $X_i(t)$ ， $i=0,1,2,\dots,N$ 的表达式借助计算机代数方法算出，如MAPLE。借助Chebyshev多项式的推导式(4)和(12)式，(9)式左边的第四项可以简化为

$$\begin{aligned} \delta u \left(\sum_{i=0}^N x_i(t)U_i(u)\right)^3 &= \delta u \left(\sum_{i=0}^{3N} X_i(t)U_i(u)\right) \\ &= \frac{1}{2} \delta \left(\sum_{i=0}^{3N} X_i(t)[U_{i-1}(u) + U_{i+1}(u)]\right) \\ &= \frac{1}{2} \delta \left(\sum_{i=0}^{3N} U_i(u)[X_{i-1}(t) + X_{i+1}(t)]\right) \end{aligned} \quad (13)$$

在此由于对(8)式的逼近，可设 X_{3N+1}, X_{-1} 为零。此时，把(12)式，(13)式带入(9)式，可有

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt}\right) \sum_{i=0}^N x_i(t)U_i(u) &+ \frac{1}{3}c\frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{3N} X_i(t)U_i(u) + \bar{b} \sum_{i=0}^{3N} X_i(t)U_i(u) \\ &+ \frac{1}{2}\delta \sum_{i=0}^{3N} [X_{i+1}(t) + X_{i-1}(t)]U_i(u) = f(t). \end{aligned} \quad (14)$$

接着在(14)式的两边同时依次乘以 $U_i(u)$ ，再对其取期望。由Chebyshev多项式的正交性，最终我们可得

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt}\right)x_0(t) + \frac{1}{3}c\frac{d}{dt}X_0(t) + \bar{b}X_0(t) + \frac{1}{2}\delta X_1(t) = f(t) \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt}\right)x_1(t) + \frac{1}{3}c\frac{d}{dt}X_1(t) + \bar{b}X_1(t) + \frac{1}{2}\delta[X_0(t) + X_2(t)] = 0 \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt}\right)x_2(t) + \frac{1}{3}c\frac{d}{dt}X_2(t) + \bar{b}X_2(t) + \frac{1}{2}\delta[X_1(t) + X_3(t)] = 0 \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt}\right)x_3(t) + \frac{1}{3}c\frac{d}{dt}X_3(t) + \bar{b}X_3(t) + \frac{1}{2}\delta[X_2(t) + X_4(t)] = 0 \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt}\right)x_4(t) + \frac{1}{3}c\frac{d}{dt}X_4(t) + \bar{b}X_4(t) + \frac{1}{2}\delta[X_3(t)] = 0 \end{cases} \quad (15)$$

这样我们就使用第二类Chebyshev多项式逼近法

把具有服从拱形分布特征的随机参数 U 的随机Duffing-van der Pol系统整理成为一个与其等价的确定性系统。

(8)式中当 $N \rightarrow \infty$ 时， $\sum_{i=0}^N x_i(t)U_i(u)$ 就严格等价于随机系统 $x(t,u)$ 。另外，如果 N 是有限的，(8)式就为具有一个微小误差的逼近值。在以下的数值分析中，我们取 $N=4$ ，通过有效数值方法求得(15)式的数值解为 $x_i(t), (i=0,1,2,3,4)$ 。因而，原随机DP系统的逼近随机响应可以表示为

$$x(t,u) = \sum_{i=0}^4 x_i(t)U_i(u) \quad (16)$$

假如随机参数 $u=0$ ，即 $b=\bar{b}$ ，我们就可以分析得出所谓的均值参数系统，其在下面的论述中有着重要的意义。那么这样的均值参数系统的样本响应即

$$x(t,0) = \sum_{i=0}^4 x_i(t)U_i(0) = x_0(t) - x_2(t) + x_4(t). \quad (17)$$

另外，随机Duffing-van der Pol系统的集合平均响应可为

$$E[x(t,u)] = \sum_{i=0}^4 x_i(t)E[U_i(u)] = x_0(t) \quad (18)$$

三、随机DP系统中的分岔行为

原随机DP系统可以写为

$$\ddot{x} + (a + cx^2)\dot{x} + (\bar{b} + \delta u)x^3 = f(t). \quad (19)$$

当 $u=0$ 时，(19)式简化成均值参数系统，也就是一个确定性系统

$$\ddot{x} + (a + cx^2)\dot{x} + \bar{b}x^3 = f(t). \quad (20)$$

当对应一系列具体的初始条件和激励值时，就可以求得各种不同的响应。首先，通过(16)式、(17)式，随机响应 $x(t,u)$ 、样本响应 $x(t,0)$ 可以分别求得。另外，均值参数系统(20)的确定性响应 $x(t)$ 可直接应用Runge-Kutta法求得，进而可以用其来检验正交多项式逼近法的正确性。因此，我们可以通过比较以下三种响应的相轨描述图来分析具有随机参数的随机系统的分岔行为：均值参数系统的样本响应 $x(t,0)$ ；确定性系统的确定性响应 $x(t)$ ；随机DP系统的集合平均响应 $E[x(t,u)]$ 。等价的确定性系统(15)式的初值定义为：

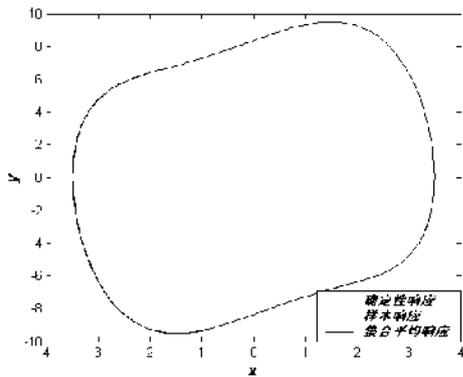
$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= [x_0(0), \dots, x_4(0)]^T \\ \mathbf{y}(0) &= [\dot{x}_0(0), \dots, \dot{x}_4(0)]^T \end{aligned}$$

确定性DP系统，(20)式的初值定义为 $x_0 = x(0), y_0 = \dot{x}(0)$ 。本文中，参数 δ 取得是一个很小的值，因此确定性等价系统的初值与确定性DP系统，(20)式的初值相同，也就是

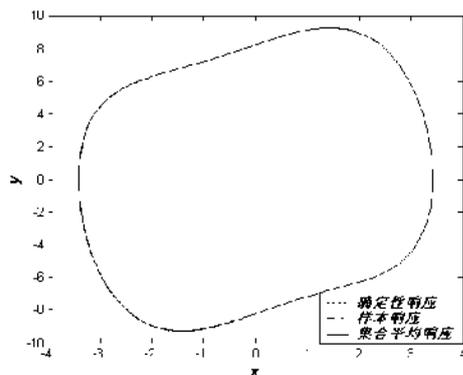
$$x_0 = x_0(0), y_0 = \dot{x}_0(0), x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0, (i=1,2,3,4)$$

(一) 鞍结分岔的双稳周期响应

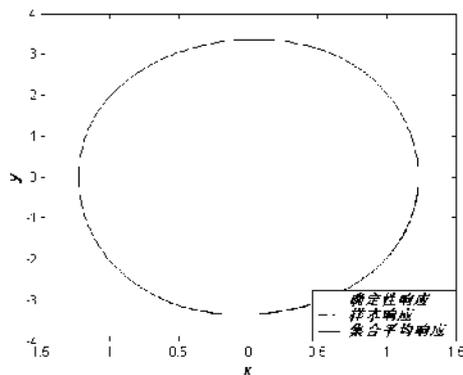
在该节中，系统中的其余参数设为： $a = -0.1, \bar{b} = 1, c = 0.3, \delta = 0.01, \omega = 2.8$ ，令谐和激励振幅 F 的值从9减小到8.2。数值分析结果如图2所示。当 $F=9.0$ 时，结果显示存在的周期响应，只有一个是稳态的，其周期为 $1T$ ($T=2\pi/\omega$) 如图2 (a)。当 $F=8.2$ 时，两个不同的初始条件 (IC-1) 和 (IC-2) 分别对应了两个不同的同周期响应，但发现他们都是稳态的，如图2 (b)、图2 (c)。



(a)



(b)



(c)

图2 (a) $F=9$ 鞍结分岔后的相轨描述图；
(b), (c) $F=8.2$ 分别对应不同初始条件 (IC-1),
(IC-2) 鞍结分岔前的相轨描述图

图2显示，在数值模拟中，随机参数系统的集合平均响应、均值系统的样本响应以及确定性系统的确定性响应吻合的很一致，说明在 $8.2 < F < 9.0$ 这一变化范围内，随机参数系统与确定性系统结果类似，均存在一个鞍结分岔。

$$\mathbf{x}(0) = [0.3, 0, 0, 0, 0]^T$$

$$(IC-1): \mathbf{y}(0) = [1.3, 0, 0, 0, 0]^T$$

$$x_0 = 0.3, y_0 = 1.3$$

$$\mathbf{x}(0) = [-1.2, 0, 0, 0, 0]^T$$

$$(IC-2): \mathbf{y}(0) = [0.7, 0, 0, 0, 0]^T$$

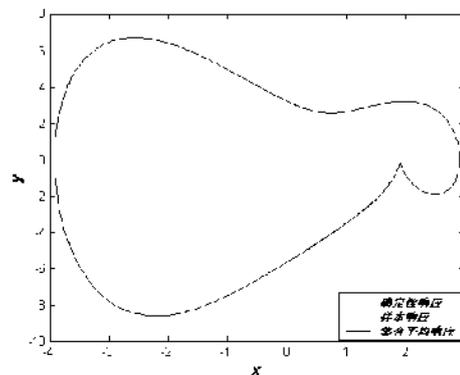
$$x_0 = -1.2, y_0 = 0.7$$

(二) 倍周期分岔

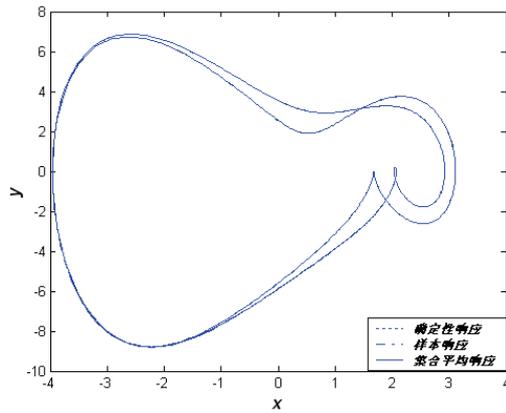
系统其他参数与3.1节相似 $a = -0.1, \bar{b} = 1.0, c = 0.1, \delta = 0.01, \omega = 1.4$ 当谐和激励 F 从15.0增大到18.2时，数值模拟如图3所示。

当 $F=15.0$ 时，对应不同的初值，数值分析结果显示存在两个稳态周期响应，它们是互相对称的，其周期为 $1T$ ，其中初值为 (IC-3) 的相轨图，如图3 (a)。当 $F=15.6$ 时，周期为 $1T$ 的相轨消失，数值分析结果出现了两个稳态周期响应，它们是互相对称的，其周期变为 $2T$ ，其中初始条件为 (IC-3) 的相轨图，如图3 (b)。当激励振幅值继续增大， $F=18.2$ 时，周期为 $2T$ 的相轨消失，数值分析结果依然是两个稳态周期响应，它们是互相对称的，但其周期增长到 $4T$ ，其中初值为 (IC-4) 的相轨图，如图3 (c)。

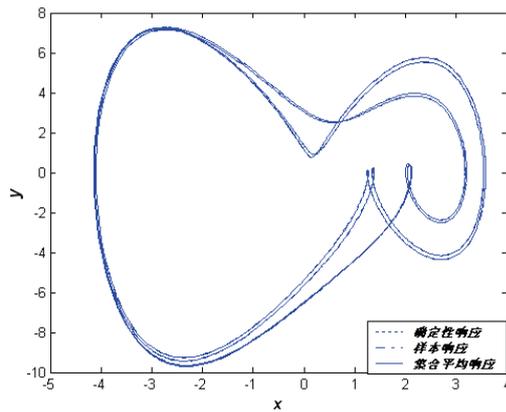
从图3中，我们很容易发现，当 F 从15.0增大到18.2时，集合平均响应、样本响应和确定性响应很一致，其相轨均出现了一系列周期倍增的现象，从 $1T$ 周期到周期 $2T$ ，继而又倍增为周期 $4T$ ，展示了一个倍周期分岔过程。进而说明类似的一系列倍周期分岔过程也可以在随机参数系统中出现。



(a)



(b)



(c)

图3 倍周期分岔相轨图

(a) $F=15.0$, (b) $F=15.6$, (c) $F=18.2$

$$\mathbf{x}(0) = [1.8, 0, 0, 0, 0]^T$$

$$(IC-3): \mathbf{y}(0) = [2.5, 0, 0, 0, 0]^T$$

$$x_0 = 1.8, y_0 = 2.5$$

$$\mathbf{x}(0) = [2.0, 0, 0, 0, 0]^T$$

$$(IC-4): \mathbf{y}(0) = [1.6, 0, 0, 0, 0]^T$$

$$x_0 = 2.0, y_0 = 1.6$$

四、结论

随机非线性系统简化成等价的确定性非线性系统可以通过正交多项式逼近理论实现。这样就可以把确定性系统的数值分析方法应用到随机非线性动力系统中，从而研究其动力学行为。本文中主要的数值分析结果表明等价的确定性系统保留了谐和激励振幅 F 为分岔参数时DP系统的一部分非线性现象。由此可见，在随机强度较小时，随机参数影响下的非线性动力系统与确定性系统有着类似的动力学行为，当随机参数的强度增大时，我们将进一步的深入研究。由此可以使用正交多项式逼近理论去分析随机非线性动力系统丰富的动力学性质，探究更多不为人知的现象。

致谢：感谢马少娟教授对我们项目的指导，对我们生活上的照顾，感谢国家为大学生提供的创新训练计划项目（项目编号：G2021-11407-013）。

参考文献：

[1]Zhu WQ, Huang ZL, and Suzuki Y. Response and stability non-linear oscillators under wide-band random excitation. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2001, 36: 1235-1250.

[2]Rong HW, Meng G and Wang XD etc. Response of a strong non-linear oscillator to narrowband random excitations. Journal of Sound and Vibration. 2003, 266: 875-887.

[3]赵雷，陈虬.随机有限元动力分析方法的研究进展.力学进展，1999，29（1）：9-18.

[4]马少娟，徐伟，李伟和靳艳飞.基于Chebyshev多项式逼近的随机van der Pol系统的倍周期分岔分析.物理学报，54，2005，3508

[5]马少娟，一类随机Van der Pol系统的Hopf分岔分析.物理学报，2011，60（1），010502（SCI检索）1.027