

广义微分求积法与分析法在分析非均匀纳米梁系统的振动行为中的对比

Hessam Bakhshi Khaniki¹, Shahrokh Hosseini Hashemi², Hossein Bakhshi Khaniki^{2*}

1 谢里夫理工大学工业工程系, 德黑兰, 伊朗

2 伊朗科技大学机械工程学院, 德黑兰, 伊朗

摘要: 这篇文章采用广义微分求积法 (GDQM) 研究可变截面纳米梁的自由振动行为。采用 Eringen 的非局部弹性理论模拟小尺度效应, 并通过指数化改变纳米梁的宽度来假设非均匀性。选取不同数量的采样点, 采用广义微分求积法解决运动控制方程。对前三个频率参数增加采样点可以得到更准确的结果, 并且选取特定的采样点数量后, 结果会合并为一定精确的数字。结论是, 与分析结果相比, 采用广义微分求积法能够得到正确的答案。此外, 由于小尺度结构的刚度软化行为, 使用 Eringen 的非局部弹性理论来模拟频率变化引起的小尺度效应是必要的。

关键词: 广义微分求积法; GDQM; 纳米梁; 非局部梁; 非均匀梁; 可变截面

Comparison between using generalized differential quadrature method and analytical solution in analyzing vibration behavior of nonuniform nanobeam systems

Hessam Bakhshi Khaniki¹, Shahrokh Hosseini Hashemi², Hossein Bakhshi Khaniki^{2*}

1 Department of Industrial Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.

2 School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

Abstract: In this article, generalized differential quadrature method (GDQM) is used to study the free vibrational behavior of variable cross section nano beams. Eringen's nonlocal elastic theory is taken into account to model the small scale effects and nonuniformity is assumed by exponentially varying the width of nanobeam. Governing equation of motion is solved using generalized differential quadrature method with different numbers of sampling points. Effects of increasing the sampling points in reaching more accurate results for first three frequency parameters are presented and it is shown that after a specific number of sampling points, results merge to a certain accurate number. It is concluded that generalized differential quadrature method is able to reach the correct answers comparing to analytical results. Moreover, due to the stiffness softening behavior of small-scale structures, necessity of using Eringen's nonlocal elastic theory to model the small scale effects due to the frequency variation is observed.

Keywords: generalized differential quadrature method; GDQM; nanobeam; nonlocal beam; nonuniform beam; variable cross section

一、引言

自从有了梁, 梁成为大多数机械设计中使用的结构之一。随着新设备的改进, 这种结构的规模已经缩小到微 / 纳米, 以制造出体积更小、质量更轻的机器。在这项研究中, 采用广义微分求积法来解决非均匀纳

米梁的管理方程。规模效应是采用 Eringen 的非局部弹性理论定义的, 梁是采用 Euler-Bernoulli 梁理论建模的。非均匀性是利用指数宽度变化提出的, 而在梁上的厚度保持恒定。图 1 给出了一个示意图模型, 此模型在以前的研究中使用过^[1-5]。

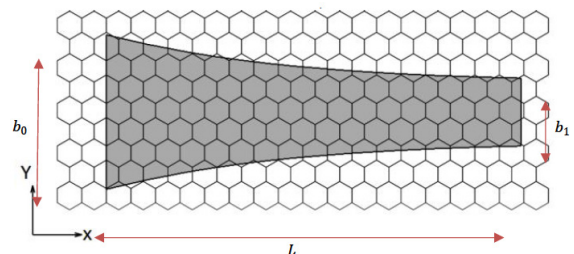


图 1. 非均匀小尺度梁的示意图
(Figure 1. Schematic representation of nonuniform small scale beam)

二、问题的提出

非局部欧拉 - 伯努利非均匀纳米梁的一般运动方程为:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + 2E \frac{d^3 w}{dx^3} + E \frac{d^2 I}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} + (e_0 a)^2 \rho A \omega^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + 2(e_0 a)^2 \rho \frac{dA}{dx} \omega^2 \frac{dw}{dx} + (e_0 a)^2 \rho \frac{d^2 A}{dx^2} \omega^2 w - \rho A \omega^2 w = 0 \quad (1)$$

其中, E 是杨氏模量项, I 和 A 是第二惯性和截面项, 是小尺度参数, ω 是频率项, ρ 是质量密度。在这项研究中, 如前所述, 指数变化是针对厚度恒定的非均匀纳米梁的宽度而提出的。因此, 非均匀项被表述为:

$$A(x) = b_0 h e^{N x}, \quad I(x) = \frac{1}{12} b_0 h^3 e^{N x} \quad (2)$$

其中, $x=0$ 时的光束宽度, h 是光束的厚度, N 是指数非均匀性, 并通过定义新的参数, 使各项之间具有相同的尺度范围:

$$X = x / L, \quad Y = y / L, \quad \eta = NL, \quad \alpha = e_0 a / L, \quad \lambda^2 = \frac{\rho A L^4 \omega^2}{EI} \quad (3)$$

其中, 通过使用这些新的参数和非均匀项, 非均匀纳米梁的运动方程可以以非维形式重写为:

$$\frac{d^4 W}{dX^4} + 2\eta \frac{d^3 W}{dX^3} + (\eta^2 - \alpha^2 \lambda^2) \frac{d^2 W}{dX^2} - \alpha^2 \eta \lambda^2 \frac{dW}{dX} + \lambda^2 (1 - \alpha^2 \eta^2) W = 0 \quad (4)$$

其中, λ 表示非维频率项。

三、解决方案

如前所述, 为了解决公式 (5) 中提出的非均匀纳米梁的非维运动方程, 采用了广义微分求积法 (GDQM)。该理论使用单项式系数和采样点来引入挠度变量, 即

$$W^{(n)}(X_i) = \sum_{k=1}^N h_{ik}^{(n)}(X_i) W_k^{(n)} + \sum_{j=2}^N h_{ij}^{(n)}(X_i) W_j + \sum_{k=1}^N h_{ik}^{(n)}(X_i) W_n^{(n)} = \sum_{k=1}^N E_{ik}^{(n)} U_k \quad (5)$$

其中, $E_{ik}^{(n)}$ 代表单项式系数, N 是采样点的数量。是 Hermite 插值形状函数, 为:

$$\begin{cases} h_{ij}^{(0)}(X_i) = \delta_{ij} \delta_p \\ h_{ip} = (X-1)^2 (a_p X^2 + b_p X + C_p) l_j(X), \quad p=1, N; \quad i=0, 1, 2 \\ h_{j0} = [X^2 (X-1)^2 / X_j^2 (X_j-1)^2] l_j(X) \quad j=2, 3, \dots, N-1 \end{cases} \quad (6)$$

l_i 是非对角线项, 定义为:

$$l_i^0 = \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^N (X_k - X_i)}{(X_i - X_i) \prod_{k=1, k \neq i}^N (X_k - X_i)}, \quad i, k=1, 2, 3, \dots, N \text{ and } k \neq i \quad (7)$$

$$l_i^r = r \left[A_{ii}^{r-1} A_{ii}^{(0)} - \frac{A_{ii}^{(r-1)}}{X_i - X_i} \right], \quad i, k=1, 2, 3, \dots, N \text{ and } k \neq i, \quad r > 1 \quad (8)$$

a_{pi}, b_{pi} 和 C_{pi} 是系数, 定义为:

在本研究中, 边界条件被假定为简单支撑, 因此得到的边界方程为:

$$\begin{cases} a_0 = (I_1^{(0)}(X_1) + 2)^2 - \frac{I_1^{(2)}(X_1)}{2} - 1 + 2I_1^{(0)}(X_1) \\ a_1 = -(I_1^{(0)}(X_1) + 2)^2 \\ a_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} b_0 = -(I_1^{(0)}(X_1) + 2) - 2a_0 X_1 \\ b_1 = 1 - 2a_1 X_1 \\ b_2 = -X_1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} c_{10} = 1 + a_0 X_1^2 + X_1 (I_1^{(0)}(X_1) + 2) \\ c_{11} = X_1 (a_1 X_1 - 1) \\ c_{12} = \frac{X_1^2}{2} \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} a_{N0} = (I_N^{(0)}(X_N) - 2)^2 - \frac{I_N^{(2)}(X_N)}{2} - 1 + 2I_N^{(0)}(X_N) \\ a_{N1} = -(I_N^{(0)}(X_N) + 2)^2 \\ a_{N2} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} b_{N0} = -(I_N^{(0)}(X_N) + 2) - 2a_{N0} X_N \\ b_{N1} = 1 - 2a_{N1} X_N \\ b_{N2} = -X_N \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} c_{N0} = 1 + a_{N0} X_N^2 + X_N (I_N^{(0)}(X_N) + 2) \\ c_{N1} = X_N (a_{N1} X_N - 1) \\ c_{N2} = \frac{X_N^2}{2} \end{cases} \quad (14)$$

在本研究中, 边界条件被假定为简单支撑, 因此得到的边界方程为:

$$\text{Simply-Supported: } W(X_i) = 0, \quad \frac{dW(X_i)}{dX^2} = 0 \quad i=1 \& N \quad (15)$$

应该提到的是, 虽然这个解决方案是针对简单支撑的非均匀梁做的, 但它也可以分配给其他类型的边界。利用这些方程并重写公式 (4), 可以得出

$$\sum_{k=1}^{N+2} (E_k^{(4)} + 2\eta E_k^{(3)} + \eta^2 E_k^{(2)}) U_k - \lambda^2 \sum_{k=1}^{N+2} (\alpha^2 E_k^{(2)} + \alpha^2 \eta E_k^{(1)} - (1 - \alpha^2 \eta^2) E_k) U_k = 0 \quad (16)$$

其中, 可以根据以前的文献^[6,7]来定义。公式 (16) 中的每个采样点的方程式可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} [S_{aa}]_{k \times k} & [S_{aw}]_{k \times k} \\ [S_{wa}]_{(n-1) \times (n-1)} & [S_{ww}]_{(n-1) \times (n-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_a\} \\ \{U_w\} \end{Bmatrix} - \lambda^2 \begin{bmatrix} [Q_{aa}]_{k \times k} & [Q_{aw}]_{k \times k} \\ [Q_{wa}]_{(n-1) \times (n-1)} & [Q_{ww}]_{(n-1) \times (n-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_a\} \\ \{U_w\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (17)$$

因此, 广义的特征值方程可以写为:

$$[S_{aa}] - [S_{aw}] [S_{ww}]^{-1} [S_{wa}] - \lambda^2 [Q_{aa}] - [Q_{aw}] [S_{ww}]^{-1} [Q_{wa}] = 0 \quad (18)$$

通过计算公式 (18) 的结果, 可以得到频率模式编号。

四、结果和讨论

如前几节所示, 提出了非均匀非局部梁的自由振动运动方程, 并逐步得到了使用 GDQ 方法的求解过程。为了研究当前求解过程和方法的准确性, 我们获得了不同数量采样点的频率项, 并与使用分析方法计算的频率项进行了比较。为此, 我们计算了前三个非维频率项并在表 1 中列出。选择了不同

数量的采样点, 采样点数量为 5 到 8 个不等。此外, 还计算了平均误差, 并与 Hashemi 和 Khaniki^[4] 得到的分析结果相比较, 列于表中。可以看出, 增加采样点的数量可以减少相关的平均误差。采样点增加到一定数量后,

结果合并为特定的数字, 与分析结果相比, 有很大的一致性。从结果中可以再次看到, 增加非局部项可以减少前三个振动模式的频率项。

表 1. $\eta=1$ 时非均匀纳米梁的第一模式振动频率项

(Table 1. First mode of vibration frequency term in nonuniform nanobeam with)

解决方法	误差 (%)					
分析法 ^[4]	2.624137	2.787796	2.948800	3.076059	3.126165	-
GDQM 5 个节点	2.648128	2.790631	2.975591	3.103779	3.141507	6.63278e-3
GDQM 6 个节点	2.623994	2.787297	2.948568	3.077145	3.127054	1.89918e-4
GDQM 7 个节点	2.624128	2.787754	2.948798	3.076066	3.126171	4.67371e-6
GDQM 8 个节点	2.624128	2.787754	2.948798	3.076066	3.126171	4.67371e-6

表 2. 时非均匀纳米梁的第二模式振动频率项

(Table 2. Second mode of vibration frequency term in nonuniform nanobeam with)

解决方法						误差 (%)
分析法 ^[4]	3.795550	4.315183	5.004425	5.820408	6.290498	-
GDQM 5 个节点	3.810800	4.321869	5.005180	5.840437	6.302245	2.20534 e-3
GDQM 6 个节点	3.796457	4.3160276	5.005812	5.821824	6.292014	2.39225 e-4
GDQM 7 个节点	3.795564	4.315108	5.004471	5.820398	6.290454	7.79473 e-6
GDQM 8 个节点	3.795564	4.315108	5.004471	5.820398	6.290454	7.79473 e-6

表 3. 时非均匀纳米梁的第三模式振动频率项

(Table 3. Third mode of vibration frequency term in nonuniform nanobeam with)

解决方法						误差 (%)
分析法 ^[4]	4.768500	5.442014	6.467170	8.073308	9.432419	-
GDQM 5 个节点	4.767854	5.441456	6.466045	8.072585	9.430874	1.33063 e-4
GDQM 6 个节点	4.768421	5.442874	6.466924	8.072987	9.432010	5.91514 e-5
GDQM 7 个节点	4.768472	5.441987	6.467122	8.073358	9.432371	5.90749 e-6
GDQM 8 个节点	4.768472	5.441987	6.467122	8.073358	9.432371	5.90749 e-6

五、结论

变截面非局部小尺度梁的自由振动分析是采用 GDQ 方法完成的。采用欧拉-伯努利梁和 Eringen 的非局部弹性理论对纳米梁进行建模。广义微分求积法是针对当前问题逐步提出的。本文对不同数量的采样点进行了计算，提出了前三个频率参数的结果，并与分析求解的结果进行了比较。对不同数量的采样点提出了平均相关误差，并讨论了当前方法的准确性。结果表明，GDQM 方法在解决这个问题上有很好的能力和准确性，频率项的精度很高。报告中提到，使用简单支撑作为边界条件，在指数截面可变的非均匀纳米梁中增加非局部参数会导致前三个模态形状的频率参数变小，在分析非均匀纳米梁时有必要增加非局部效应。

参考文献

- [1] Ece, M.C., Aydogdu, M., Taskin, V. (2007) Vibration of A Variable Cross-Section Beam. *Mechanics Research Communications*, 34, 78 - 84.
- [2] Khaniki, H.B., Hashemi, S.H. (2017) Free Vibration Analysis of Nonuniform Microbeams Based on Modified Couple Stress Theory: An Analytical Solution. *International Journal of Engineering-Transactions B: Applications*, 30, 311 - 320.

- [3] Hashemi, S.H., Khaniki, H.B. (2016) Analytical Solution for Free Vibration of A Variable Cross-Section Nonlocal Nanobeam. *International Journal of Engineering-Transactions B: Applications*, 29, 688 - 696.

- [4] Hashemi, S.H., Khaniki, H.B. (2017) Vibration Analysis of A Timoshenko Non-Uniform Nanobeam Based On Nonlocal Theory: An Analytical Solution. *International Journal of Nano Dimension*, 8, 70 - 81.

- [5] Hashemi, S.H., Khaniki, H.B. (2016) Free Vibration Analysis of Functionally Graded Materials Non-uniform Beams. *International Journal of Engineering-Transactions C: Aspects*, 29, 1734 - 1740.

- [6] Wu, T.Y., Liu, G.R. (1999) A Differential Quadrature as A Numerical Method to Solve Differential Equations. *Computational Mechanics*, 24, 197 - 205.

- [7] Wu, T.Y., Liu, G.R. (2000) Application of Generalized Differential Quadrature Rule to Sixth-Order Differential Equations. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 16, 777 - 784.