

# Mathematica 在二重积分计算教与学的研究

宋宏权 张薇

周口师范学院 河南周口 466001

**【摘要】** 二重积分计算身为高等数学教学中的主要内容, 很多学生在学习这一知识期间, 经常一头雾水, 因而会对学生学习兴趣产生影响。二重积分计算身为高等数学教学的主要内容, 对很多学生而言, 难以及时理解并掌握这一思想, 若借助 Mathematica 软件, 则能帮助学生突破二重积分学习困难, 从而为学生学习二重积分开拓思路, 最终促进二重积分教学顺利开展。基于此, 文章就 Mathematica 在二重积分教学中的应用展开详细分析, 希望能促进二重积分教学顺利进行。

**【关键词】** 二重积分; Mathematica; 应用

多元函数积分作为高等数学中的一个主要内容, 随着社会主义现代化建设发展, 很多问题经过实际转化都可以转变为多元函数积分问题。二重积分身为积分教学中的一个主要内容, 对初学人员而言, 难度较大, 所以教师教学期间应借助新的方法, 帮助学生理解二重积分定义, 同时掌握其应用于计算法则。课堂教学期间, 应联合使用多媒体软件辅助教学, 便于提升实际教学效率。传统教学软件虽然具备文字与图片演示功能, 但是其难以绘制空间图形, 故而在二重积分教学中应用效果并不显著。

Mathematica 身为集成环境, 具备数学符号编辑功能, 且是一个较好的教学辅助平台, 软件教学期间, 操作简单, 利用简单命令即可绘制准确几何图形, 使用数字符号即可演示图形程序与符号编辑功能。

## 一、Mathematica 下的二重积分计算

利用二重积分性质及定义, 我们通常只能用来解决少量计算问题, Fubini 定理中将二重积分转化为累次积分, 借助单变量函数积分处理重积分。针对初学者而言, 使用这一方法, 需要解决下面两方面问题: 一, 将被积分函数画出来, 即画出  $f(x,y)$  图像; 二, 找到累计积分的上下限, 但是解决这一问题的难点为需要画出积分区域图形。所以, 理解二重积分计算需要先学会画图, 但是手工画图, 即便是对简单的二元函数而言, 也十分困难, 更别提针对复杂的图形了。因此, 对于大部分学生而言, 绘图在二重积分计算学习期间面临的主要难题。借助 Mathematica 作图能力, 即可帮助学生解决这一问题。

## 二、案例分析

直角坐标系中二重积分算法主要是应用极坐标计算二重积分, 这是解决曲面积分的基础。所以, 其是理工科专业学生需要重点掌握的内容。但是现阶段很多学生高等数学学习时间较短, 不能深刻理解积分思想, 加上定积分应用操作不熟练, 因此学习起来相对困难。由此, 下文主要介绍 Mathematica 在直角坐标系下的积分算法。

### 1. 动态演示概念

X 型积分区域作为这一章节的重点, 为了让学生及时准确掌握积分区域特点, 同时了解定义域中二元函数曲顶柱体特点, 文章编写如下图 1 动态演示界面, 这一图形可以直观展现 X 型区域与这一区域对应下的曲顶柱体特点。在图形中我们可以发现 X 型积分区域表示如下:  $D=\{(x,y)|\Phi_1(x)\leq y\leq\Phi_2(x),a\leq x\leq b\}$ 。和 X 型区域二元函数相对的曲顶柱体, 处在  $x=a$ ,  $x=b$  两个平行平面间。下图中连接 AB 点的直线可以借助界面上面控制按钮

进行移动, 线段 AB 经过的平面位置即是 X 型积分区域, 在如下动态演示中, 可以帮助学生准确理解 X 型区域积分及曲顶柱体特点。Mathematica 环境中, 人们可以拉动图形当中曲顶柱体, 便于站在不同视角观察这一立体图形。这种动态演示方法需要用到不同函数编程, 常见的有 Manipulate、Arrow、Text 等。由于程序较长, 这里就不一一简述。

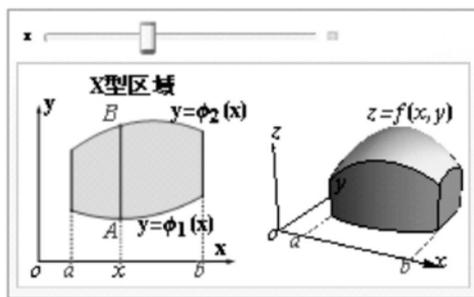


图 1 X 型区域与曲顶柱体

### 2. 动态演示二重积分算法

直角坐标系将二重积分转变为二次积分的方法是这一章节学习的重点。学生微积分学习时间较短, 关于定积分理解并不深刻, 定积分计算方法掌握不熟练, 因此, 其难以在课堂中全面理解二重积分公式推导原则及积分次序选择等问题, 更别提在课堂当中合理应用所学知识解决实际数学问题。所以, 日常教学期间, 可以将 Mathematica 软件应用在课堂辅助教学中, 便于降低二重积分学习难度。

为了找到教学重点, 教学期间应简单引入, 也就是在课堂内容学习期间, 通过掌握二重积分几何意义, 便于将二重积分计算问题变成计算曲柱顶体面积。本文当中, 先讲解 X 型区域二重积分算法, 借助 X 型积分区域中二重积分算法获得普通区域二重积分算法。讲解 X 型区域二重积分计算方法期间, 文章制作图 1 动态演示界面, 学生通过观察可以了解到, 可以将二重积分求解变为计算两个平行平面间立体体积。为了帮助学生全面理解计算方法, 文章编写图 2 动态演示界面。借助滑动界面上端滑块合理控制截面位置, 这一过程当中, 截面在 yoz 平面当中的投影也会相继改变。这一过程期间, 通过拉动图 2 当中的立体图形, 即可从不同视角观察截面情况, 借助演示界面, 即可让学生清除了解上述平行截面都是曲边梯形, 与此同时, 学生即可想到使用定积分知识求解截面面积。同时出曲顶柱体体积公式。具体公式如下:

$$\forall x_0 \in [a,b] \text{ 截面面积: } A(x_0) = \int_{\Phi_1(x_0)}^{\Phi_2(x_0)} f(x_0,y) dy,$$

$$\forall x \in [a,b] \text{ 截面面积: } A(x) = \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x,y) dy,$$

曲顶柱体积:  $V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy \right] dx$  ,

二重积分计算公式:  $\iint_D f(x,y) d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{\phi_1}^{\phi_2} f(x,y) dy \right] dx$  。

如此, 推导过程也就相对交单。图形演示期间, 我们应将公式演示在投影屏幕当中, 确保演示界面美观整洁。学生理解 X 型区域当中的二重积分公式之后, 我们即可快速给出 Y 区域中二重积分计算公式, 最终推导出普通区域当中二重积分分算法。

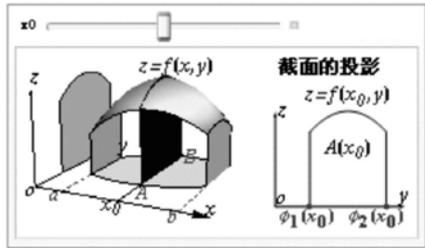


图2 动态截面图

### 3. 辅助例题讲解

下面文章给出四个例子, 其中前两个例子主要 X 型与 Y 型区域二重积分当中二次积分法, 第 3 个例子重点讲解普通积分区域中二重积分分算法应用, 同时引领学生合理选择积分次序。第 4 个例题: 求圆柱面  $x^2+y^2=R^2$  及  $x^2+z^2=R^2$  围成立体体积。

该例题简述二重积分立体体积求解, 同时引领学生合理应用定积分方法解决实际问题过程。上面三个例子当中, 我们应引领学生应用课堂中学到的知识及时求解。第四个问题为, 求解立体体积形状, 这一案例较为特殊, 对学生空间想象力有一定要求, 空间想象力不好的学生难以在短时间里找到解决这一问题方法。演示期间可以帮助学生站在不同视角查看待求解立体结构形状, 当演示立体图形在第一卦限时, 学生即可看到处在第一卦限部分是曲顶柱体, 其中, 项是柱面, 底是四分之一圆, 结合二重积分意义, 学生很快就可以将这一问题转变为二重积分问题, 演示期间, 可以借助界面中的显示图形, 先展现直交柱面, 然后站在不同视角观察其构成的立体形状, 接着显示立体在第一卦限图形, 同时引领学生计算这一部分体积。动态演示模块中会用到 Manipulate、Arrow、Text 等函数编程, 由于程序相对较长, 这里并没有逐一列出。

为了帮助学生灵活使用所学知识, 文章就上述例题给出了一种新的解决方法, 并制作如下图 3 动态演示界面, 引领学生认真观察立体平行 yoz 平面截面形状都是矩形, 学生即可明白可以将问题转变为平行截面面积, 便于解决已知立体体积。如此, 学生不仅提升对二重积分分算法的理解, 还能对定积分应用价值进行充分认识, 此外还能培养学生多面解决问题能力。

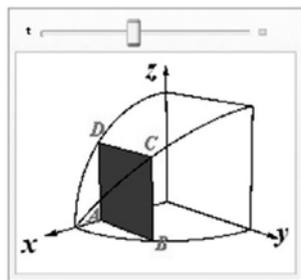


图3 领解图示

## 三、Mathematica 在二重积分计算应用心得

### 1. 区分二重积分与二次积分

不管使用哪种方法计算二重积分, 其方法都是将二重积分

转变为二次积分, 一, 先将其中一个积分变量转变为二次积分, 重点为找出积分上下限, 若不能确定积分上下限, 则可以借助 Mathematica 将积分区域画出, 借助画出积分区域, 即可准确判断二重积分区域是 X 型还是 Y 型, 若积分区域二者都不是, 此时需要对其进行分割, 如此方能确定积分上下限, 便于获得正确结果。因此在二重积分与二次积分划分上应十分注意。

### 2. 培养学生 Mathematica 解决二重积分思维

Mathematica 身为一种科学计算软件, 其中包含较多函数, 应用期间应积极调动函数相关功能。很多学生并不熟悉这一软件, 尤其不知道怎样应用二重积分。Mathematica 在解答二重积分应用期间, 思路有两个: 一, 直接利用软件解决二重积分函数, 如此即可获得二重积分数值; 二, 将二重积分变为二次积分, 便于间接获得二重积分。使用第二种方法可以使结果更为清晰, 与此同时, 也能帮助学生掌握二重积分求解过程。具体而言应努力做到以下几点:

2.1 提升学生课堂参与度。选择教学方法期间, 因学生学习期间常常形成合作学习氛围, 故而我们常常选择将手动操与合作学习法相结合。这一教学方法可以让学生开展小组互助学习, 如此不仅可以帮助基础较差学生提升基础, 还能鼓励学生自主开展实验操作, 充当课堂教学主体, 提升学生课堂参与度, 从而获得明显教学成效。

2.2 激发学生学习兴趣。让学生在繁琐计算中解脱出来, 让其将更多时间与精力放在数学方法与思维中, 从而有更多精力解决那些更难问题。借助现代化技术可以抽抽象数学理论直观化, 便于激发学生学习兴趣, 从而让学生更爱学习数学。

2.3 培养学生思想。一, 教学期间化难的问题为简单, 将未知问题变为已知的, 借助二重积分变为二次积分, 启发学生思维, 便于让学生将多重积分变为多次积分, 从而为后续三重积分与普通知识学习奠定良好基础。

### 3. 提升二重积分解决效率

在解决二重积分计算问题期间, 结合被积分函数与积分区域情况, 使用不同计算方法, 如此方能更好的解决二重积分问题。其中有时候需要联合使用不同方法, 二重积分求解期间需要合理应用现有条件进行计算, 这对解决沟通积分内容, 提高学生解决问题思路十分重要, 此外, 还能帮助学生熟练选择计算方法, 便于学生快速准确解决二重积分问题。积分作为微分的逆运算, 积分求解难度比微分求解难度高很多, Mathematica 软件的应用能帮助学生解决复杂积分计算, 培养学生二重积分学习兴趣。二重积分求解期间, 需要将某一变量当做常数, 然后再对另外变量进行积分, 这一过程容易使学生混淆变量, 进而出现计算错误。所以, 有必要加强 Mathematica 在二重积分计算中的应用, 提升学生解决二重积分效率与兴趣度。

## 四、结语

综上, 文章通过介绍 Mathematica 软件在直角坐标系中二重积分课堂教学中的应用, 在前面介绍中我们发现, 合理应用 Mathematica 来演示复杂立体图形, 可以有效提升二重积分教学效率, 不断激发学生学习兴趣。Mathematica 软件具备强大图形程序设计及项目演示等功能, 因此可以将其视为良好的实验与学习平台, 同时可以辅助二重积分课堂教学顺利开展。教学实践期间, 应多次尝试类似实验, 便于凸显课堂教学重点。

基金项目: : 周口师范学院校级教育教学改革研究项目 J2019016

## 参考文献

- [1] 干国胜, 孙旭东. Mathematica 在二重积分计算教与学的研究 [J]. 汉江师范学院学报, 2018, 38(06): 20-24.
- [2] 徐薇薇. MATLAB 在二重积分计算中的应用 [J]. 天津职业院校联合学报, 2017, 19(02): 116-120+124.
- [3] 夏云. 类比法在二重积分概念教学中的应用 [J]. 考试周刊, 2018(77): 108.
- [4] 李敏, 补爱军. Mathematica 在二重积分教学中的应用 [J]. 怀化学院学报, 2013, 32(05): 82-84.
- [5] 陈文平, 蒋利华. 二重积分概念的建模教学法 [J]. 佳木斯职业学院学报, 2020, 36(03): 180-181.
- [6] 王景艳, 李玲. Mathematica 数学软件在高等数学积分教学中的应用 [J]. 保山学院学报, 2019, 38(05): 71-75.