数列求和常用方法浅析

吴奎

四川音乐学院附中 四川 成都 610021

【摘　要】：数列既是我们上高中和初级代数的重要教学内容，也是我们学习高等数学的理论基础，还是我们进行高考和各类数学课程竞赛的基本题型，数列的求和是数列的重要教育内容之一，具有复杂多变、综合性强、计算方法灵活等优势。

【关键词】：高考数学；数列求和；解题技巧

我们可以将数列看成特殊的函数，表达的是数列的通项公式 $a_n=f(n)$ 中的项 a_n 与项数 n 之间的关系，除了常用的基本求和公式外，一部分数列的求和可以用一定的技巧。当遇到具体的问题时，我们可以通过观察数列的特征和规律，运用类比推理的手段来找到恰当的解题思路。

1 基本最重要的方法：运用等差数列和等比数列常用的求和运算公式

1.等差数列求和公式

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

2.等比数列求和公式

$$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq 1)\end{cases}$$

3. $S_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

4. $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

5. $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^3=[\frac{1}{2}n(n+1)]^2$

2 用错位相减法求和

这种计算和的方法通常来说是在为推导等比数列的前和后 n 项和计算公式时，所需要采取的一种计算和的方法，主要适用于求数列 $c_n=a_n\cdot b_n$ 的前 n 项和，其中$\{a_n\}$、$\{b_n\}$一个为等差数列，一个为等比数列。

例 1 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$。

（1）计算 a_2，a_3，求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

（2）求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n。

解析（1）$\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=2n+1$

（2）令 $b_n=2^n a_n=(2n+1)\times 2^n$，

则 $S_n=3\times 2^1+5\times 2^2+\cdots+(2n+1)\times 2^n$……①，

$2S_n=3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-1)2^n+(2n+1)\times 2^{n+1}$……②，

由①－②得，

$$-S_n=3\times 2+2\times 2^2+\cdots+2\times 2^n-(2n+1)\times 2^{n+1}=6+\frac{2^3(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n+1)\times 2^{n+1}$$

化简得 $S_n=(2n-1)\times 2^{n+1}+2$.

错位相减法适用于 $c_n=a_n\cdot b_n$，其中 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列。

步骤：此时可把式子 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$ 的两边同乘以公比 $q(q\neq 0$ 且 $q\neq 1)$，得到

$qS_n = a_1q + a_2q + \cdots + a_{n-1}q + a_nq$，两式错位相减整理即可求出 S_n.

3 用倒序相加法求和

这种方法是推导等差数列的前 n 项和公式时所用的方法之一，这种方法的本质是得到 n 个相同的和，从而将问题简化。

例 2 设 $f(x)=\frac{4x}{4x+2}$，若 $S=f(\frac{1}{2\,015})+f(\frac{2}{2\,015})+\ldots+f(\frac{2\,014}{2\,015})$，则 S=________.

解析 $\because f(x)=\frac{4x}{4x+2}$，$\therefore f(1-x)=\frac{41-x}{41-x+2}=\frac{2}{2+4x}$.

$\therefore f(x)+f(1-x)=\frac{4x}{4x+2}+\frac{2}{2+4x}=1$.

$S=f(\frac{1}{2\,015})+f(\frac{2}{2\,015})+\ldots+f(\frac{2\,014}{2\,015})$，①

$S=f(\frac{2\,014}{2\,015})+f(\frac{2\,013}{2\,015})+\ldots+f(\frac{1}{2\,015})$，②

①+②，得 $2S=[f(\frac{1}{2\,015})+f(\frac{2\,014}{2\,015})]+[f(\frac{2}{2\,015})+f(\frac{2\,013}{2\,015})]+\ldots+[f(\frac{2\,014}{2\,015})+f(\frac{1}{2\,015})]=2\,014$.

$\therefore S=\frac{2\,014}{2}=1\,007$.

4 用分组相加法求和

有一类数列，既不是等比数列，也不是等差数列，但是将这类数列适当拆开，可以分为等比、等差或一些常见的数列，然后分别求和，最后再将其合并即可。

例 3.已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，

$b_2=3$，$b_3=9$，$a_1=b_1$，$a_{14}=b_4$

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=a_n\cdot b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

解：（1）等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q=\frac{b_3}{b_2}=\frac{9}{3}=3$，

所以 $b_1=\frac{b_2}{q}=1$，$b_4=b_3q=27$.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

因为 $a_1=b_1=1$，$a_{14}=b_4=27$，

所以 $1+13d=27$，即 $d=2$.

所以 $a_n=2n-1$（$n=1$，2，3，$\cdots$）.

（2）由（1）知，$a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$.

因此 $c_n=a_n+b_n=2n-1+3^{n-1}$.

从而数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n=1+3+\cdots+(2n-1)+1+3+\cdots+3^{n-1}$$

$$=\frac{n(1+2n-1)}{2}+\frac{1-3^n}{1-3}$$

$$=n^2+\frac{3^n-1}{2}.$$

5 裂项相消法求和

这种方法求和就是将数列中的每个项直接拆成两项之差，在求和时相互抵消，若有几项没有被相互抵消，我们将剩下的项求和。相互抵消法的求和本质就是将整个数列求和中的各个项，其中包括所有通项分别进行一次分解，然后再次重新对项进行分解组合，使之能够直接消去一些项，最终我们可以直接达到数列求和的最终目标。

裂项常见形式：

$(1)\frac{1}{n^2-n}=\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n};$

$(2)\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1});$

$(3)\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n};$

(4)如果$\{a_n\}$为等差数列,则有$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}});$

$(5)\frac{n+1}{n(n-1)\cdot 2^n}=\frac{2n-(n-1)}{n(n-1)\cdot 2^n}=\frac{1}{(n-1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{n\cdot 2^n}.$

例 4、S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知

$a_n>0, a_n{}^2+2a_n=4S_n+3$，

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$,求数列$\{b_n\}$的前n项和。

解：（1）数列$\{a_n\}$满足：$n\geq 2$时,$a_1+3a_2+\ldots+(2n-3)a_{n-1}=2(n-1)$

$\therefore (2n-1)a_n=2$

$\therefore a_n=\frac{2}{2n-1}$，当$n=1$时,$a_1=2$,上式也成立,

（2）$\frac{a_n}{2n+1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$

$\therefore$数列$\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$的前 n 项和为：

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$

6 分段求和法

针对一些特殊的数列，将某些项合并在一起就具有某种特殊的性质，因此，在求数列的和时，可将这些项放在一起先求和，然后再求数列的和 S_n.

例 5.数列$\{a_n\}$：$a_1=1, a_2=3, a_3=2, a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，求 S2020.

解：设 S2020$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2020}$

由$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=2,\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$可得

$a_4=-1,\ a_5=-3,\ a_6=-2,$

$a_7=1,\ a_8=3,\ a_9=2,\ a_{10}=-1,\ a_{11}=-3,\ a_{12}=-2,$

......

$a_{6k+1}=1,\ a_{6k+2}=3,\ a_{6k+3}=2,\ a_{6k+4}=-1,\ a_{6k+5}=-3,\ a_{6k+6}=-2$

$\because$

$a_{6k+1}+a_{6k+2}+a_{6k+3}+a_{6k+4}+a_{6k+5}+a_{6k+6}=0$

$\therefore$ S2020$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2020}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots a_6)+(a_7+a_8+\cdots a_{12})+\cdots+(a_{6k+1}+a_{6k+2}+\cdots+a_{6k+6})$

$+\cdots+(a_{2011}+a_{2012}+\cdots+a_{2016})+a_{2017}+a_{2018}+a_{2019}+a_{2020}$

$=a_{2017}+a_{2018}+a_{2019}+a_{2020}$

$=a_{6k+1}+a_{6k+2}+a_{6k+3}+a_{6k+4}=5$

7 利用数列通项法求和

先根据对不同数列的基本结构及其排列特点规律进行综合分析，找出每一个不同数列的通项和其排列特点，然后充分地分析利用每一个不同数列的通项公式映揭示表现出来的排列规律，从而可以求得每一个不同数列的 n 项和，这是一个重要的数学研究解题方法。

例 6.已知数列{a_n}：

$a_n=\frac{8}{(n+1)(n+3)}$,求$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_n-a_{n+1})$的值.

解：

∵

$$(n+1)(a_n-a_{n+1})=8(n+1)[\frac{1}{(n+1)(n+3)}-\frac{1}{(n+2)(n+4)}]$$

$$=8\cdot[\frac{1}{(n+2)(n+4)}+\frac{1}{(n+3)(n+4)}]$$

$$=4\cdot(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4})+8(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4})$$

∴

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_n-a_{n+1})=4\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4})+8\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4})$$

$$=4\cdot(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+8\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\frac{13}{3}$$

本文总结了七种求解数列通项公式的方法，由此可以看出数列通项公式的求解考题之灵活多变，所以数学方法的积累和数学思想的培养极其重要，希望老师和学生都能在这方面多下功夫，提高自身的数学素养。

参考文献：

[1] 张蜀青.数列教学中的数学思想之光[J].数学通报,2021,60(2):45-47.

[2] 李振良.数列求和方法[J].中学生数学,2018(10):16-17.

[3] 张斌.求数列和的常用方法[J].语数外学习(高中版下旬),2021(02):47.

[4] 曾伟华,龙承星.高中数学数列通项公式的求解技巧[J].数学大世界(上旬),2021(04).