

多元表征变式教学视角下的数学策略

——以高中微积分为例

赵青

河北北方学院理学院 河北 张家口 075000

【摘要】：本文主要从多元表征和变式教学对高中微积分这部分内容的融入展开，首先分析了微积分学习面临的困难，然后了解了关于微积分的思维和技能，最后设计了基于多元表征变式教学视角下高中微积分的教学过程。多元表征与变式教学的融合目的是发展学生数学学科核心素养（以下所提到的核心素养没有特殊说明均指数学学科核心素养），使其获得终身学习的能力，本文主张从知识本身和学生视角出发，希望可以为教师教学提供一些策略。

【关键词】：多元表征；变式教学；微积分

1 基于多元表征变式教学的微积分学习

数学学习在于对知识的整体性理解和细节化理解，变式教学有利于学生对知识本质的把握、同化新知识，多元表征趋向于对知识本源的理解，不同的表征可以导致学生不同的思维方式，两者相互促进，有利于共同发展学生的核心素养。

1.1 学习微积分的困难

微积分这部分内容学生在初中时期没有接触过，关于微积分内容的一些符号和概念比较抽象，学生习惯了直观性的知识，对抽象性的知识难免会有些束手无策，不知道该从何理解，而且一下子从常量到变量思维模式的转变，知识结构跨度比较大，题目变式花样多，学生难以把握。在导数的概念引入时，学生无法将课上内容与实际生活相结合，无法将曾经学习过的知识迁移到新知识中来，降低了学生学习的积极性，再加上老师对学生的已有知识框架了解的不清晰，导致教学效果不佳。

1.2 微积分思想的载体

微积分思想的载体可以概括为运算、图象和模型，运算可以帮助学生建立数的数感，提高逻辑推理能力，换句话说逻辑推理能力也是学生发展数学运算能力的基础；图象是从教师引导学生学习导数的重要途径，也是多元表征学习的一种形式，微积分中的很多内容都涉及到函数，函数的应用和图象也有着密不可分的联系。在导数的应用部分，多元表征可以帮助学生构建模型、理解概念含义，有利于学生对知识的全面理解，学生需要通过构建数学模型解决实际问题，学生可以构建不同的数学模型来表达不同的生活情境。

2 多元表征变式教学视角下的高中微积分教学设计

2.1 基于多元表征变式教学的微积分学习模型构建

多元表征是西方倡导的教学方式，倾向于多元学习，变式教学是中国传统的教学方式，倾向于本质学习，基于多元表征的变式教学有利于学生从整体把握知识结构，发散学生思维，可以在学生对知识本质理解的基础上培养学生的创新能力。

表征可以符号表征、言语表征和图形表征等，这是知识表征的

外在形式，内在本质是相关联的，每个学习者的擅长领域是不同的，有人擅长直观想象、有人擅长言语表述等，在学习材料中每个人通过自己擅长的表征形式可以提高学习的意义、发展学生的核心素养，通过学生之间的交流可以强化对知识的多元理解。变式教学可以通过改变一些外延的形式来加强学生对知识本质上的理解，例如通过曾经学习过的函数引出导数与切线之间的关系，用“举反例”纠正猜想的不正确理解，用“一题多变”帮助学生理解知识的本质。

微积分的教学过程应该是以“教师引入的问题或情境”为出发点、以多元表征为载体、变式教学为手段、以形成微积分思维为目标、以解决问题为落脚点的，基于多元表征变式教学的具体过程参考如下：提出问题（生活情境、已有经验）→多元表征→变式问题（问题由简到难）→解决问题（指向思维品质和情感态度价值观）→抽象表征（知识的实质，等价替换）。以导数的概念形成为例，在言语表征的基础上进行变式：由运动员的平均速度引出瞬时速度、由线段的平均变化率到点的瞬时变化率；在符号表征的基础上进行变式：平均变化率的表示方法可以是 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ，也可以是 $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 。基于多元表征的变式教学有利于丰富概念形成的过程，有利于学生对知识本质的理解和迁移，培养学生的发散性思维 and 创新能力，进一步培养学生的核心素养。如图1所示。

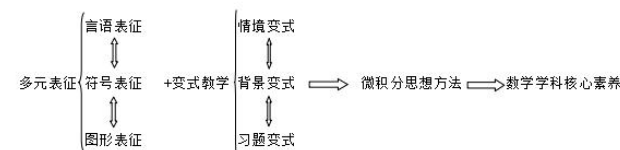


图1 多元表征变式教学视角下的机制图

2.2 教学设计

(1) 课前准备

评估素养情况，细分知识目标和素养目标，以问题驱动来开启教学，培养学生带着问题思考的能力，让学生小组探讨。导数的概念是一个过程还是一个结果？通过对比平均变化率你能尝试用图像

来表示瞬时变化率吗？不定积分与定积分之间有什么关系？定积分的求解还有没有第二种方法？无论学生回答正确与否，教师都应该给予以激励为主的评价，旨在鼓励学生独立思考，发展数学建模、数学抽象等核心素养。

(2) 课中策略

创设合理情境：教师在引入极限思想之前可以先引入生活中的例子，如电视的显示屏就是利用了极限的原理，十几年前的电视当信号不好的时候就会出现很多灰白的小方块，其实所显示的画面本身就是锯齿形的，但是由于密度特别高呈现在我们眼前的就是流畅清晰的画面了。像素也是如此，像素本身就是由很多小方格组成的，每一个小方格都有自己明确的颜色和位置，这也就直接影响我们看到的图像是什么样子的。通过联系实际生活，提高学生学习的兴趣，会使课堂效果事半功倍。

尝试多元表征：想让学生准确理解导数的概念，可以借助学生对旧知识的内化，通过各种表征之间的相互转化促进学生核心素养的培育。在学生初中时期刚接触到函数问题的时候，最先用表格和图像结合法来引入一次函数，紧接着二次函数也是如此，让学生初步了解了多元表征之间的联系，到了高中微积分中部分内容与函数问题还是密切相关，很多题目需要学生对导函数进行分析，当遇到复杂函数时教师要引导学生尝试多元表征（例如图像表征、符号表征、言语表征），利用数形结合思想找到合适的数学方法。以定积分概念为例：

①言语表征

第一步分割曲形面积，第二步利用以直代曲的思想，第三步对每一个小曲边梯形的面积求和，第四步取极限。当我们分割成 n 个曲面梯形的时候， n 越大误差越小，当 $n \rightarrow \infty$ 时，误差最小。

②图形表征

先画出一个关于 $y=x^2$ 的函数图像，只保留右半部分，在画出 $x=1$ 这条直线，求解他们之间围成的面积，然后通过分割成小的曲边梯形让学生理解，教师展示三种不同大小的分割，同学们可以一目了然分割越细误差越小。（图形略）

③符号表征

$$S_{\text{总}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \dots + \Delta S_n \approx \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = 0 + \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

然后让学生思考，曲形面积和 n 之间有什么关系呢？是不是分割的曲面梯形越多误差越小呢？所以上面的式子当 $n \rightarrow \infty$ 时我们得到的结果就越接近曲形面积，当 $n \rightarrow \infty$ 时，我们得到的结果是 $\frac{1}{3}$ 。

以上介绍了三种表征，尽量丰富表征形式，多种表征相结合有利于提高学生认知数学思想方法的能力，对于一些处于迷茫状态的学生提供了方向，加深理解了符号背后的数学意义，尝试从不同角度抽象出数学概念。从核心素养的角度看，单一的逻辑思维体系不利于学生逻辑思维的发展，多元表征以多种呈现方式归纳共性形成了概念，使学生思维训练更加全面合理，有利于提高学生的数学抽

象和逻辑推理能力，加深了学生对定积分的理解和应用，实现从“学会”到“会学”。

设计变式教学：变式教学的核心是“一题多变”，对数学问题不断的进行抽象，旨在激发学生的学习动机，使学生怀着批判性思维看待问题，变式问题由浅到深层层递进，增强学生学好数学的自信心，实现从浅层学习到深度学习，进一步培养学生的数学抽象。在学习微积分这部分内容时，很多同学认为极值就是最值，本质在于他们没有搞清楚复杂函数的增减区间可以有很多个。在进行知识转化的时候，教师可以引导学生对已学知识进行延伸，从而得到一些新结论，这些新结论便可以当作新的定理来使用，培养了学生的逻辑推理素养和数学抽象素养。以利用导数求解切线方程为例：

例题 1：求函数 $y=f(x)=x^2$ 在 $x_0=2$ 处的切线方程。

例题 2：求解函数 $y=x^2$ 过点 $(3, 5)$ 的切线方程。

例题 3： $y=x^2$ 在点 p 处的切线方程与直线 $4x-y+2=0$ 平行，求 P 点的坐标及切线方程。

从三个例题我们可以看出题目的难度由易到难，符合学生认知规律，例题 1 是利用导数求解切线方程的简单应用，例题 2 解决了点不在切线上的这类问题，即等价替换思想和新知相结合解决数学问题，例题 3 需要学生通过斜率相等找到 p 点坐标，为解决复杂一些的问题提供了思路。例题 1 和学生的认知直接相关，也可以理解为浅层学习，例题 2 和例题 3 是在例题一的基础上进行变式，需要学生将新旧知识结合起来，是认知的飞跃。题目的变式过程可以补充一些条件，可以改变一些条件，需要解题者发挥直观想象，用联想、类比等多种思维介入，在这样一系列的变式中也培养了学生的直观想象能力。

使用信息技术：使用多媒体技术有利于学生直观的看到多元表征之间的广泛联系，题目的变式、图像的变化也更加直观，增添学生学习数学的趣味性的同时培养了学生直观想象的能力，但是在变式教学过程中，建议教师用屏幕展示问题的变化，用粉笔写出解题过程。

(3) 课后跟进

设计思维导图：教师尝试让学生设计关于本节内容的思维导图，引导学生对课上提到的表征和问题串回顾和反思，思维导图可以是知识与知识之间的联系，可以是解题思路，可以是多元表征视角下的知识概念，可以是关于同一个知识点的变式题目，旨在加深学生对知识的深层次理解。

尝试自主命题：这里需要教师引导学生自主命题的方向，让学生尝试一题多解，思考除了课上介绍的表征形式还有没有其他表征，思考对问题进行一些变化（增加条件、改变条件、删减条件）能否产生新的数学问题，从课上变式的题目还能不能进行进一步延伸继续变式？这个过程主要培养学生独立思考的能力，构建自己对数学概念、关系的表征变式，认识到微积分的知识内容是具体模型的抽象，进一步发展逻辑推理、直观想象和数学抽象素养。

开展数学活动：当一章内容学习结束后，教师可以开展一堂活动课，课程的主要内容是以小组为单位，构造生活实际情景，将数学与生活实际完美融合，给予每个学生不同的身份，增强学生校园学习与社会的衔接程度，使学生在实践中体会知识发展的过程。在变式探究教学的时候，教师可以通过变式习题让学生在错误的理解中找寻经验，让学生共享失败的经验，培养学生的发散性思维。在这个过程中教师要注意一方面揭示知识的现实背景，一方面还要强调知识的应用，建立学生的知识共同体，营造合作竞争的学习环境，

引导学生形成正确的价值观、人生观，活动过后给予学生客观评价，自评与他评相结合促进学生全面发展和进步。

3 结论与展望

本文以多元表征变式教学的融合视角，通过“范例”的多元表征和变式教学设计关于微积分的整体教学思路，旨在帮助学生建立起完整的知识结构框架，激活学生原有的数学经验，帮助学生在加深对知识本质理解的基础上培养创新思维，发展学生独立思考和终身学习的能力，使微积分思维良好地应用在问题解决中。

参考文献：

- [1] 李静. 哲学视野下小学数学多元表征变式教学构建及其实证研究[J]. 数学教育学报, 2016, 25(05): 45-48+91.
- [2] 李静, 刘志扬, 宋乃庆. 基于多元表征发展代数思维的教学模式研究[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2011, 36(03): 268-271.
- [3] Edwards, B., Dubinsky, E., McDonald, M. A. Advanced Mathematical thinking[J]. Mathematical thinking and learning, 2005, 7(1): 15-25.

作者简介：赵青，女，河北省沧州市新华区，硕士研究生，数学教育方向，河北北方学院，河北省张家口市，075000。