

从课标读教材：对现行小学数学教材中“认识方程”的思考

申永康

扬州大学教育科学学院 江苏 扬州 225000

【摘要】：现行的小学数学教材版本中，几乎所有的教材关于方程的定义都是：称含有未知数的等式为方程。但是这种定义是不确切的，也不能把握方程的本质。本研究以“人教版”小学数学教材为例，从数学定义和教学实践两个角度对“认识方程”进行了分析，给出了建议。

【关键词】：课程标准；小学数学；认识方程

Reading textbooks from the curriculum: Reflections on the "cognitive equations" in current primary school mathematics textbooks

Yongkang Shen

College of Educational Sciences, Yangzhou University Jiangsu Yangzhou 225000

Abstract:In the current version of the elementary school mathematics textbook, almost all textbooks define equations as equations that contain unknown numbers. But this definition is imprecise and does not grasp the essence of the equation. Taking the "Human-Taught Edition" primary school mathematics textbook as an example, this study analyzes the "cognitive equation" from the perspectives of mathematical definition and teaching practice, and gives suggestions.

Keywords:Curriculum Standards; Elementary School Mathematics; Understanding Equations

在大多数版本的义务教育阶段小学数学教材中，方程是小学阶段接触到的最为抽象的概念。在现行小学数学教材版本中，几乎所有的教材关于方程的定义都是：含有未知数的等式为方程。但是，这种定义只是一种形式上的描述，这种形式上的描述不可能把握方程的本质。甚至，这个定义本身是不确切的。

本研究针对此问题，选取2013年由人民教育出版社出版的小学数学教材（简称“人教版”）为例，从数学定义和教学实践两个角度对“认识方程”进行了分析。

1 数学定义的角度分析方程

关于这条定义：

方程是含有未知数的等式。（命题1.1）

这是一种不确切的定义。有学者指出^[1]：“把‘方程’定义为‘含有未知数的等式’是形式化的，外延过宽，并且没有完整反映‘方程’的本质属性。”。按照通常的理解，所谓的等式就是用等号连接起来的式子，等号具有两个功能，一个功能表示等号两边的量相等，另一个功能表示运算结果的递推。显然，方程中的等号是基于第一个功能的，不

是基于第二个功能的。比如说， $5x-3x=2x$ 这个式子中的等号是基于第二个功能的，它仅仅表达的是一种运算的递推。因此，即使这个等式含有未知数，但这个等式却并不是方程。这个事实说明，现行教材中关于方程的定义（即命题1）不可以构成实质定义，它是一种充分不必要的性质命题。

我们必须注意到的是，数学定义必须是充分必要的性质命题。而现在，因为有 $5x-3x=2x$ 、乘法交换律 $ab=ba$ 等这样的反例存在，命题1.1的陈述就不能够成为方程的定义，只可作为方程的性质命题。想要构建方程的实质定义，就需要在命题1.1的陈述句的基础上进行精细加工。这里采用属加种差的定义方法，在命题1.1中，“等式”是属，“方程”是种，“含有未知数”是种差。对命题1.1的陈述句采取对“种”进行更加严格的划分的方法，比如，如果认为等式存在，并且只存在这两种形式：一种形式表示等号两边的“量相等”；另一种形式表示运算的“递推”。史宁中教授认为：因为方程采用的是上述第一种形式，那么，据此可以得到方程的实质定义^[2]：

方程是含有未知数的表示量相等的等式。（命题1.2）

可以看到，“含有未知数”与“表示量相等”就说出

“方程”这个种在“等式”这个属中的本质特征，并且这个特征在“等式”这个属中与“方程”这个种是充分必要的。

2 教学实践的角度分析方程

在小学数学教学实践上，马云鹏教授对方程的教学做过以下总结^[3]：“长期以来，在小学阶段教学简易方程、方程变形的依据是四则运算各部分间的关系，这实际上是用算术的思路求未知数。”。显然，这样的教学利用到了学生头脑中已经具备的学习方程相关的原有知识，因此便于快速理解新知，但是不利于掌握方程的实质，也不利于衔接中学的进一步学习。同时也有文献对一线教师的调查结果显示^[4]：“100%的教师表示不好上方程的概念，方程的概念学生容易掌握的流于表面算术式方程的错误。还有很多同学对类似运算定律的等式有所疑惑，经常出现无法判断是否是方程。即使是优秀教师也相对缺乏有效的教学办法。”。这也体现出大部分一线教师在教学中都认为，教学方程时难以落实方程的意义，经常出现算术式方程或者无意义方程。

本研究以“人教版”五年级上册，“方程的意义”这一节中为例，教材内容是这样呈现的：从对天平平衡的理解，列出等式和不等式，在比较中再引出等式和方程的关系，给出方程的定义，在后面的练习中，进一步加深对方程的认识——“称含有未知数的等式为方程”。



图1 人教版五年级上册“方程的认识”

具体的教学实践上，有研究者对一线教师的方程教学设计做过调查，结果显示100%的教师按照人教版教材设计教学过程^[4]。结合该研究者的调查以及笔者对一线教师方程教学的总结，具体整理方程教学模型如下：

首先通过天平演示，证明天平平衡的条件是左右两边所放的物体质量相等，从而引出等式。然后更换天平上的物品，让学生描述一只空杯的质量，刚好是砝码的100克，进一步体会天平平衡的意义。接着在水杯中倒水，通过不断地放置

或减少砝码，得到不等式。最后使得天平平衡时，也就知道了杯子和水共重250克。这是一个动态演示的过程，让学生体会天平从不平衡到平衡的过程，得出方程 $100+x=250$ 。然后给出一个实物图，得出第二个方程 $3x=2.4$ 。以这两个方程为例，给出方程概念的描述。

接下来，大部分教师往往会再通过天平或者其他方式，在黑板上会得到一大堆式子（8-10个为佳），这个时候老师会提问学生：“同学们，你们能把它们分分类吗？”。一般教师会引导学生将其分为两类：有等号的和没有等号的。接着，老师会提出第二个问题：“同学们，你们能把有等号的式子再分一分类吗？”。通过引导，同学们会把等式分为含有未知数的和不含未知数的两部分。于是，在这个时候，教师一般都会声情并茂地再次指着分出来的含有未知数的等式这部分式子说：“同学们，像这样含有未知数的等式叫方程”。

这种教学方法忠于教材，经典常规，无疑是一种非常棒的教学方法，但是在整个教学过程中没有看到一点方程的作用展现，这里是把方程当作一个数学对象来认识，是概念认知式的教学。

关于方程的认识，2011版的课标指出：“能用方程表示简单情境中的等量关系（如 $3x+2=5, 2x-x=3$ ），了解方程的作用”^[5]。这里对比2001版实验稿能够看到：由“会用方程表示简单情境中的等量关系”改为“能用方程表示简单情境中的等量关系，了解方程的作用”。显而易见，改了一个字，加了一句话。“会”改为“能”是程度的加深，对加入“了解方程的作用”这句话的理解可以参考2011版的课标解读：“方程与不等式是刻画数量关系的重要数学模型……对于方程作为刻画现实情境中数量关系，沟通已知数和未知数的一种数学模型提供了素材……”^[6]。可以知道，方程的作用是一种重要的数学模型。

学习的本质是让未知变为已知，至少在小学阶段是这样。让未知变成已知有两种途径：其一是直接进入未知世界探索，其二是在已知世界和未知世界之间建立桥梁，借助已知世界认识未知世界。数学模型的作用就是在已知世界和未知世界建立桥梁。

在教学实践中，如何从侧重“了解方程的作用”的角度来认识方程呢？这里以“猜年龄”的例子给出一种教学设计参考：

师：同学们，你们知道老师的年龄吗？板书我的年龄是未知数X。那同学们你们知道你们的年龄吗？

生：10岁，11岁……

师：那好，老师取你们年龄的均值10岁，板书已知数10岁。那同学们想让老师的年龄这个未知数变成已知数吗？该怎么知道呢？

生：老师你直接告诉我，老师你把身份证给我看一下，老师我去问问其他老师去……

师：好，同学们，老师已经知道你们想采取的办法了，其实这些都是有直接去了解的意思，但今天老师想和大家分享一种全新的认识未知数的方式。如果老师待会告诉大家我的年龄和你们的年龄之间的关系，你们有信心很快知道我的年龄吗？

生：有！

师：展示第一个关系：我的年龄减去20岁，还比你的年龄大。并让同学们列式。

生：老师这个关系不够，不能知道你的年龄。

师：好，我再展示第二个关系：我的年龄减去30岁，要比你的年龄小。并让同学们列式。

生：老师这个关系还不够。

师：怎么还不够呢？奇了怪了，我都展示两个关系了，一个大于关系，一个小于关系。你们到底想要什么关系？

生：老师，我们不想要大于关系和小于关系，我们想要那种刚刚好的关系。

师：好，我再给一个关系：我的年龄减去27岁，和你的年龄相等。

生：老师你的年龄37岁！

师：这三句话都给出了我的年龄和你的年龄之间的关系，为什么前两个不行，第三个可以呢？教师板书三个式子。同学们观察这三个式子，哪个式子是解出老师年龄的式子？

为什么呢？

生：老师，那个相等的式子可以解出，因为它是相等关系。

师：好，同学们真棒，看来相等关系不是一般的关系，在数学上这个叫等量关系。教师板书：

像这样在未知数和已知数之间建立起来的等量关系式叫作方程。（命题1.3）

这种教学实践虽然“篡改”了教材关于方程的定义，但是它把方程教成了一种有价值的数学模型。方程的本质就是描述现实世界中未知与已知的等量关系，它借助未知数 x 讲述两个故事，这两个故事在某一个要素上的量具有相等关系，也正是这个原因使得方程可以作为构建数学模型的数学语言。

综上所述，在长期的教学中，越来越多的教师发现难以落实方程的意义教学，学生们经常列出算术式的方程，甚至是毫无意义的“方程”，究其原因就在于学生没有理解方程是在未知数和已知数之间建立等量关系的这一本质。一个完整的概念学习需要包含三个部分，即让学生明白“它是什么（概念理解）”“怎么得到它（方法层面）”“它有什么用（问题解决）”^[7]。

各版本教科书给出的情境示例是可以做出上面的教学设计的。例如，“人教版”教材从对天平平衡的理解过渡到对不等关系和相等关系的理解，让学生将已知数和未知数自然地联系起来并建立等量关系，从而体会方程的意义。所以在教学实践中，教师不要局限于教材，要多从课标和实际应用出发，重点关注课标的变化部分。在“方程的认识”或“方程的意义”这一节，教师们不妨从“了解方程的作用”的角度出发进行教学设计，这不仅有利于改善“学生只知解方程，不知如何列方程”的状况，也有利于方程教学中两大数学思想的培养：建模思想和化归思想。

参考文献：

- [1] 刘久成.方程概念教学“四问”[J].中小学教师培训,2021(02):43-45.
- [2] 史宁中.数学基本思想18讲[M].北京:北京师范大学出版社,2016:129.
- [3] 马云鹏.小学数学课程标准与教材研究[M].北京:高等教育出版社,2016:154.
- [4] 朱利芳.基于教材比较的小学数学简易方程教学策略研究[D].杭州师范大学,2020.
- [5] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2011年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2012:22.

- [6] 教育部基础教育课程教材专家工作组织编写.义务教育数学课程标准解读:2011年版[M].北京:北京师范大学出版社,2011.144-145.
- [7] 马珏.找准体验点,让学生真正明白——方程教学策略谈[J].教学月刊:小学版(数学),2021(7):51-54.