浅谈《数学分析》课程思想品德元素的挖掘

孙 杰 那园园

牡丹江师范学院数学科学学院 黑龙江 牡丹江 157011

【摘 要】：结合学校办学特色及人才培养的实际情况，以数列极限、导数定义及由平行截面面积求体积三节课为例探讨《数学分析》课程教学中思想品德元素的挖掘及探索推进中采取的方法。

【关键词】：数学分析；思想品德元素；课程教学；极限；积分

A brief discussion on the excavation of the ideological and moral elements of the "Mathematical Analysis" course

Jie Sun Yuanyuan Na

School of Mathematical Sciences, Mudanjiang Normal University, Heilongjiang Mudanjiang 157011

Abstract: Combined with the actual situation of the school's school-running characteristics and talent training, this paper takes the limit of the number series, the definition of derivatives and the three lessons of volume from the parallel cross-section area as an example to explore the methods adopted in the excavation and exploration of the ideological and moral elements in the teaching of the "Mathematical Analysis" course.

Keywords: mathematical analysis; ideological character elements; curriculum teaching; limits; integrals

《数学分析》课程是高等院校数学类专业的学科基础课程之一，是分析学方向的最重要的学科基础课程。本课程开设的目的在于使学生理解《数学分析》中的基本概念和基本理论，掌握典型的分析方法和技巧；培养学生严格的逻辑思维能力、熟练的计算能力和较强的解决实际问题的能力，以加深对中学数学的理解，并为实变函数、泛函分析等课程打下基础。

数学分析课程内容主要包括一元函数微积分、多元函数微积分及级数理论。在教学过程中，我们立足于数学与应用数学专业培养目标，结合《数学分析》课程特点，使学生掌握一定的调和分析的思想方法，培养学生严谨的治学态度，学习数学知识的同时，树立正确的人生观、世界观、价值观，激发学生的学习兴趣和坚定的职业信仰。数学分析课程及科学性，严密性和连贯性于一体，系统性和逻辑性强，是连接处等数学和高等数学的桥梁，也是区分初等数学和高等数学的标志，对于刚上大学的大学生来讲，从初等数学。用非极限方法研究常量数学到高等数学，用极限方法。研究变量，数学的转变过程中，等课程的学习起着关键作用，通过本课程的学习，学生可以对近代使用数学的发展，有一个初步的了解，进而提高学习数学的兴趣，提高使用所学。

1 结合专业特点，融入思想品德元素

数学与应用数学专业是为国家培养新时代数学教师队伍的专业。新时代的师范生应具有爱岗敬业、无私奉献的理想信念，德高为师，身正为范的道德情操，集专业知识与科学素质的扎实学识，爱国家，爱学生，爱自然的仁爱之心。融入思想品德元素并不是将其强硬的加入到课程之中，而是应该遵循因材施教，因地制宜的基本原则，结合数学与应用数学专业学生的自身特点和培养目标要求有的放矢。这就需要每一位专业课教师在教学过程中循循善诱，将思想品德元素融入到教学活动中，使我们培养的学生能够成为适应基础教育改革发展需要，具有创新精神和实践能力的数学教师。

2 深挖课程内容，提炼思想品德元素

数学分析是数学与应用数学专业的核心基础课，是后续专业课学习的基础，也是数学专业硕士研究生入学考试的笔试科目，其重要性毋庸置疑。但由于数学分析课时多、内容难、周期长等原因，数学分析的教学仍以传统教学手段为主。在课程思想品德立德树人的目标下，教师在教学过程中以教学内容为载体，适时融入思想品德元素，给学生传播正能量，以教师的主导作用发挥学生在课堂中的主体作用，使学生在学到专业知识的同时，树立正确的人生观、世界观、价值观，进一步激发学生的学习兴趣和坚定的职业信仰。

首先我们以数列极限的概念为例，探究思想品德元素的挖掘。

问题导入：结合中国古代哲学家庄周所著的《庄子·天

下篇》中：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”。引导学生学习知识，培养发现问题、解决问题能力。培养学生的家国情怀和文化自信。通过实例，先给出数列收敛的描述性定义，进一步引入数列收敛的 $\varepsilon - N$ 语言。 设 $\{a_n\}$ 为数列,a 为实数,若对任给的正数 ε ,总存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a,实数 a 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限,并记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 或 $a_n \to a(n \to \infty)$.通过静态与动态，无限到有限，量变与质变的辩证关系。体现了从有限到无限，从量变到质变的思想，也体现了中国古代数学思想来源于生活。通过例题分析加深学生们对 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的 $\varepsilon - N$ 的关键是要找到与 ε 相关的 N，而我们关心的是 N 的存在性；ε 的任意性，暂时固定性，多值性；N 的相应性，多值性.这里主要体现定义中变量之间的关联性.培养学生科学的思维方式，掌握学以致用的本领，培养学生严谨的学习态度。而有些问题的 N 直接利用 $|a_n - a| < \varepsilon$ 求解 N 并不容易。例如 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 1)$ 在 $|\frac{a^n}{n!} - 0| < \varepsilon$ 中 N 不好求解。因此在许多的讨论中可以适当放大 $|a_n - a| < * < \varepsilon$，而恰当的*满足 $* < \varepsilon$ 可以找到 N 的存在性。上例可以如下放缩求可以求出 N.因为

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\cdots\frac{a}{[a]}\cdot\frac{a}{[a]+1}\cdots\cdots\frac{a}{n} < \frac{a^{[a]}}{[a]!}\cdot\frac{a}{n} = c\cdot\frac{a}{n} \quad (c = \frac{a^{[a]}}{[a]!})$$

，$\forall\ \varepsilon > 0$，要使 $\left|\frac{a^n}{n!} - 0\right| = \frac{a^n}{n!} < \varepsilon$ ，只要 $\frac{c\cdot a}{n} < \varepsilon$ ，取 $N = \left[\frac{c\cdot a}{\varepsilon}\right]$，

则只要 $n > N$，就有 $\left|\frac{a^n}{n!} - 0\right| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

用定义求极限或证明极限的关键是适当放大不等式，需注意两点，一是把隐性表达式变成显性表达式，在重锁迷雾中看清庐山真面目，二是抓住主要矛盾，舍去次要矛盾；要取舍合理，不能放大得过分.比如 $|a_n - a|$ 为分式时，我们一般放大分母，缩小分子，放缩的*式中分母中要保留 n。

极限思想贯穿整个数学分析教程。数列极限的思想是数学分析课程中后继学习极限、微积分等的基础。教学内容包括极限起源、极限定义及极限本质。主要通过师生共同探讨，以启发式教学贯穿课堂，激发学生对学习的兴趣和课堂知识的融会贯通。结合历史，抽象出极限概念，深深体会到数学的魅力与严谨性。

其次，我们探究一下导数的定义这节课中的思想品德元素。

作为新一章的开篇，我们通过介绍数学家费马（Fermat）、牛顿（Newton）、莱布尼兹（Leibuniz）等数学家对导数研究的贡献来激发学生的求知欲望。

介绍导数定义时，一方面为了扩大学生视野，增强文化自信，激发学生刻苦专研、奋发向上的决心，我们以我国航天事业蓬勃发展，神州 13 号宇宙飞船成功发射，是我国航天事业的又一伟大壮举为例，考虑宇宙飞船发射过程中，某一时刻的瞬时速度如何求；另一方面以几何问题中的平面曲线在某一点出切线的斜率如何得到两个问题来引入。

两个实际问题讨论了一种特殊形式的极限

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

是否存在的问题。并随着科学研究的深入许多物理及几何问题都归结为讨论（1）式极限是否存在的问题。因此引出导数的定义。设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在,则称函数 f 在点 x_0 处可导,并称该极限为 f 在点 x_0 处的导数,记作 $f'(x_0)$.即

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$

若上述极限不存在,则称 f 在点 x_0 处不可导。这是典型的从具体模型抽象出一般给出定义的方法。而这种定义的给出，也说明了数学是基础，是工具学科，其重要性毋庸置疑。

引入导数的定义之后，介绍了一个重要结论即“可导必连续”，而这个命题的逆命题却不一定成立。一个的例子就是 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处的左右导数不同，因此该函数在 $x = 0$ 处不可导，图像上看 $x = 0$ 为函数 $y = |x|$ 的一个“尖点”，但 $y = |x|$ 在点 $x = 0$ 连续，引申出图像上具有“尖点”或“角点”的函数在“尖点”或“角点”的横坐标处是连续的，但却不是可导的，因此可以设计一个教学环节让学生构造出具体函数在某一点 $x = a$ 连续并不可导的例子，如 $y = |x\text{-}a|$。进一步再激发同学们利用常用的等价无穷小构造其他的函数是否能够造出来其他函数，学生会构造出 $y = \sin|x\text{-}a|$，$y = e^{|x-a|} - 1$ 等，继续追问能否构造出有 n 个不可导点的连续函数，学生在启发下构造出 $y = |x\text{-}a_1||x\text{-}a_2|\cdots|x\text{-}a_n|$，$y = \sin(|x\text{-}a_1||x\text{-}a_2|\cdots|x\text{-}a_n|)$ 及

$y=e^{|x-a_1|\cdot|x-a_2|\cdot\cdots\cdot|x-a_n|}-1$（$a_1\neq a_2\neq\cdots\neq a_n$）等[4]。再继续追问一个自然的问题“是否存在处处连续处处不可导函数”？先来做一个$[-1,1]$上的函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\le x<0\\ -x+1, & 0\le x<1\end{cases}$ 在 R 上做周期延拓，其图像的“尖点”对应的横坐标 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 为这个函数的不可导点，将一个周期 $-1\le x\le1$ 四等分为底边,另两边分别作平行于 $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\le x<0\\ -x+1, & 0\le x<1\end{cases}$ 的相似三角形，再进行延拓，我们得到了一个连续函数其“尖点”对应的横坐标为 $x=0,\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{4},\pm2,\cdots$，重复上述过程就可以得到处处连续处处不可导函数。著名的例子是 1872 年 Weierstrass 利用函数项级数构造的如下函数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x),\text{其中}a<1,b=2Z+1,(Z\in R),\text{且}ab>1+\frac{3}{2}\pi$$

Weierstrass 的反例构造出来后，在数学界引起极大的震动，因为对于这类函数，传统的数学方法已无能为力，这使得经典数学陷入又一次危机。但是反过来危机的产生又促使数学家们去探索新的方法对这类函数进行研究，从而促成了一门新的学科“分形几何”的产生。所谓“分形”，就是指几何上的一种“形”，它的局部与整体按某种方式具有相似性。[3]“形”的这种性质又称为“自相似性”。自然界中有许多图形具有自相似性，可以给同学们展示雪花、松果的果实等图片，可以让同学们感知数学的美。通过对知识的深入探究，带领学生们体会学科之间的联系及数学问题提出的自然性，培养学生们的学习自信心。

在导数的几何意义中介绍了极值的概念时可以通过古诗《题西林壁》引入极值的概念，会给抽象的数学课堂注入一缕诗情画意。在讲解极值知识点的时候，不仅要求学生会求函数的极值点与极值，同时还可以让学生感悟，人生就像连绵不断的曲线，会有起起落落，不是一帆风顺，这些是成长的需要，我们要做到跌入低谷不气馁，甘于平淡不放任，伫立高峰不张扬。要学会用运动的观点看待问题，低谷与顶峰只是我们人生路上的一个部分。要认识事物的真相与全貌，必须“跳出”狭小的范围，摆脱主观成见。这也体现了“局部”和“整体”的关系。

最后，我们以由平行截面面积求体积这一节课为例，深挖本节课的课程内容及结构，从中发掘所蕴含的哲学思想及思想品德元素。

我们对[a,b]做一个分割 T，$x_0=a<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 通过这些分点做垂直于 x 轴的平面，将空间立体 Ω 分割成 n 个小空间立体薄片，那么第 i 个小薄片 Ω_i 的体积 ΔV_i 近似的等于 $\Delta V_i\approx A(\xi_i)\Delta x_i$,其中 ξ_i 为 Δx_i 上任意一点；求和：把 n 个小薄片的体积的近似值叠加得到了 Ω 的体积 $V\approx\sum_{i=1}^{n}A(\xi_i)\Delta x_i$，若 A(x)在[a,b]上连续，则在[a,b]上必可积，对上式取极限令 $\|T\|\to0,\|T\|=\max_{1\le i\le n}\{|x_i-x_{i-1}|\}$，，有

$$V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}A(\xi_i)\Delta x_i$$

对于空间立体 Ω 的截面面积函数 A(x)在[a,b]上连续则 Ω 的体积公式为 $V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$

已知截面面积求体积的过程同样采用“分割-近似代替-求和-取极限”的方法，在这一过程中，我们将分割得到的小薄片用圆柱体近似代替，体现了辩证唯物主义中直与曲对立统一的原则，也体现了化整为零，积零为整的思想方法，而对“黎曼和”取极限更是科学而完美的实现了近似与准确的辩证统一。如果空间立体 Ω_1, Ω_2 做垂直于 x 轴所得截面面积函数为连续函数 $A_1(x)$ 和 $A_2(x)$ 且 $A_1(x)=A_2(x),\ a\le x\le b$，由截面面积函数求体积公式我们有 $V_1=\int_a^b A_1(x)dx=\int_a^b A_2(x)dx=V_2$.[2]

众所周知，祖暅原理“幂势既同，则积不容异”这个思想比西方早一千一百多年。而借助平行截面面积求体积公式，我们可以验证截面面积相同则体积也相同，与祖暅原理相互印证。并利用平行截面面积求体积公式我们还可以得到如“牟合方盖”的体积。体现了数学思想在解决实际问题中的重要性。

祖暅原理不仅是中国数学史发中的一颗明珠，更是我国古代劳动人民的智慧结晶。教师通过相关知识的教学，不仅使学生学习知识，也可以让学生认识古代数学思想的形成与发展，以及其中的现实意义，从而使学生们树立文化自信，愿意为中国文化的发展贡献自己的力量。

从培养师范生教学能力的角度来讲，通过学习祖暅原理与微积分的联系，也可以培养数学师范生将数学史融入到中学数学课程中的意识和能力。强化学生在教学中 HPM 的应用意识，多角度提升教学有效性[1]。

3 教学方式方法的改革

（1）教学方法

板书与多媒体结合法、讲授与讨论研究结合法、启发与自主探究结合法。

（2）采取的举措

①改革教学方式。由常规的灌输式教学转向专题讲座、讨论等方式，充分调动学生的主观能动性；

②改革教学手段。通过制作多媒体课件、课程片段的报告等手段，增强教学过程中的感性认识；

③改革考核方式。本课程除了进行常规的考核方式外，还增加了学生习题讲解部分的考核，注重了考核学生的应用能力，及时了解学生在学习中的不足。

4 总结与拓展

这几节课我们从哲学思想和思想品德元素两个方面切入，进行了教学设计，我们团队试图以此为出发点，立足数学分析整体课程思想品德的建设，还要进行后续课程中思想品德元素的挖掘及探索，并进行教学尝试，以期从教学反馈中逐步完善数学分析课程的思想品德建设,并通过探索促动数学分析课程的教学改革并进一步提高教学效果，使课程建设与思想品德建设“同向而行”。

参考文献：

[1] 肖明轩.信息技术支持下的 HPM 教学实践研究——以祖暅原理和丹德林双球模型为例[D].江西师范大学,2020,18-29.

[2] 华东师范大学数学科学学院.数学分析第五版(上册)[M].北京:高等教育出版社,2020.4,225-228.

[3] 常庚哲,史济怀.数学分析教程(上册)[M].北京:高等教育出版社 2003.446-448.

[4] 孙杰.构造不可导点的一种方法[J].牡丹江师范学院,2010,4,3-4.

项目支持：牡丹江师范范学院思想品德项目支持项目编号：KCSZ-2020004，中央支持地方高校发展专项资金优秀青年项目 2020YQ07.

作者简介：孙杰，1980.08，汉族，博士，副教授；研究方向：调和分析。