# 一阶微分方程的各种解法及应用

陈甜甜

成都理工大学 四川 成都 610000

**【摘　要】：**一阶微分方程是常微分方程最简单的一种方程，其在物理、化学等学科也有重要的应用。讨论和总结了常见的五类一阶微分方程的各种解法，并利用相关例子加以阐述，以及给出有关一阶微分方程实际例子的应用。

**【关键词】：**一阶微分方程；各种解法；应用

## Various solutions and applications of first-order differential equations

**Tiantian Chen**

Chengdu University of Technology Chengdu Sichuan 610000

**Abstract:**First-order differential equation is the simplest equation of ordinary differential equations, and it also has important applications in physics, chemistry and other disciplines. The various solutions of the common five types of first-order differential equations are discussed and summarized, and the relevant examples are used to illustrate them, as well as the application of practical examples of first-order differential equations.

**Keywords:** First-order differential equations; Various solutions; Applications

## 1 引言

### 1.1 研究背景

微分方程在数学等学科中占有非常重要的地位，常见的一阶微分方程有变量分离方程，恰当微分方程，齐次微分方程，伯努利方程，一阶线性微分方程五类。通过本文的研究，我们会学到丰富的数学思想方法，也能够为以后学习导数、偏导数以及高阶微分方程的求解等内容奠定基础.在本文之前，有很多学者已经研讨了类似的课题，其中王高雄、周之铭等[1]介绍了一阶微分方程的初等解法；文武[2]介绍了部分具有特殊形式的一阶常微分方程的求解方法；王晓玲[3]等介绍了一阶线性微分方程这一类型的几种解法。本文主要探索和总结这五类常见方程的各种解法和应用。

### 1.2 研究的主要内容

在本文中，先给出这五类一阶微分方程的基本形式，再依次探究它们的各种解法并用例子加以阐述，然后给出生活中有关一阶微分方程的实际应用，最后简要对比分析这些一阶微分方程的各种解法。

## 2 求解一阶微分方程的各种方法

现在我们探索这五类一阶微分方程的各种解法，并用这些方法求解相关例题。

### 2.1 恰当微分方程及其解法

对于具有对称形式的一阶微分方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \quad (2.1)$$

若 $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ 刚好是函数 $u(x,y)$ 的全微分，$M(x,y),N(x,y)$ 为矩形域内与 $x,y$ 有关的连续函数，且一阶偏导都连续，即

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

这种形式的方程就叫恰当微分方程。

下面给出恰当微分方程的解法：

（1）不定积分法

恰当微分方程有如下两个关系式：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$，将第一个关系式的两边对 $x$ 积分，得到

$$u=\int M(x,y)dx+\varphi(y), \quad (2.2)$$

$\varphi(y)$ 是关于 $y$ 的可微函数，现在选择合适的 $\varphi(y)$ 使 $u$ 也满足第二个关系式，有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\frac{d\varphi(y)}{dy}=N,$$ 由此得

$$\frac{d\varphi(y)}{dy}=N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx. \quad (2.3)$$

又因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$$

由于 $M(x,y),N(x,y)$ 为连续函数且它们的一阶偏导都连续，所以上面交换对 $x,y$ 的求导顺序的步骤是成立的.因此这说明（2.3）右端只含有 $y$，再对（2.3）左右积分，有

$\varphi(y)=\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy$，将$\varphi(y)$代入（2.2），即求得

$$u=\int M(x,y)dx+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy$$

因此恰当微分方程（2.1）的通解就是

$$u=\int M(x,y)dx+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy=c$$

（2）分项组合法

若一个方程为恰当微分方程，则将此方程中的所有项凑成全微分，这就叫分项组合法.在利用此法求解时，需有一定简单的二元函数的全微分作为基础，如

$$\frac{ydx-xdy}{xy}=d(\ln\left|\frac{x}{y}\right|),$$

$$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=d(\arctan\frac{x}{y}),$$

$$\frac{ydx-xdy}{x^2-y^2}=\frac{1}{2}d(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|).$$

（3）积分比对法

对于方程（2.2），有$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=M\\ \frac{\partial u}{\partial y}=N\end{cases}$，对这两个式子进行积分，都得到一个$u(x,y)$，即为

$\begin{cases}u(x,y)=\int Mdx+\varphi(y)\\ u(x,y)=\int Ndx+\varphi(x)\end{cases}$，其中$\varphi(x),\varphi(y)$分别只与$x,y$有关，由此即有

$$\int Mdx+\varphi(y)=\int Ndy+\varphi(x). \quad (2.4)$$

对比计算便得到只与$x$有关的$\varphi(x)$和只与$y$有关的$\varphi(y)$，最后把$\varphi(x)$代入或把$\varphi(y)$代入都可得到$u(x,y)$。

**例 1** 用积分比对法求解方程

$$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0.$$

**解** 由于$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy=\frac{\partial N}{\partial x}$，所以它是恰当微分方程，现在将求$u(x,y)$，且$u(x,y)$要满足：

$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+4y^3$，对这两个式子进行积分，有

$$\begin{cases}u(x,y)=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)\\ u(x,y)=y^4+3x^2y^2+\varphi(x)\end{cases},$$

即$x^3+3x^2y^2+\varphi(y)=y^4+3x^2y^2+\varphi(x)$，又因为$\varphi(x),\varphi(y)$分别只与$x,y$有关，通过比对，得

$\begin{cases}\varphi(x)=x^3\\ \varphi(y)=y^4\end{cases}$，所以

$$u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4,$$

即此微分方程的通解为

$$x^3+3x^2y^2+y^4=c(c\text{为任意常数})$$

**2.2 变量分离方程及其解法**

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y), \quad (2.5)$$

且$f(x)$是有关$x$的连续函数，$\varphi(y)$是有关$y$的连续函数，这种是变量分离方程。

下面给出变量分离方程的解法：

（1）分离变量法

如果$\varphi(y)\neq 0$，可将（2.5）改写为$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx$，

再将左右两边积分得到

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx+c, \quad (2.6)$$

（2.6）式是关于$x$，$y$，$c$的式子$\varphi(y,x,c)=0$或是$y$的关于$x$，$c$的式子$y=y(x,c)$，由微分（2.6）可确定关系式$y=y(x,c)$满足（2.6），其中$c$为保证（2.6）有意义的常数，则$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx+c$是（2.5）的通

解。

注：因（2.6）式不能有 $\varphi(y)=0$，但若有 $y_0$ 让 $\varphi(y_0)=0$，则 $y=y_0$ 是（2.6）的解。

（2）积分因子法

方程（2.5）可写为

$$p_1(x)q_1(y)dx+p_2(x)q_2(y)dy=0, \qquad (2.7)$$

的形式，用观察法可求得此方程的积分因子为

$\mu(x,y)=\dfrac{1}{p_2(x)q_1(y)}$，此时方程（2.7）左右同乘以此 $\mu(x,y)$，即可得到恰当微分方程

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx+\frac{q_1(x)}{q_2(x)}dy=0,$$

再用 2.1 中的方法求解，即得到变量分离方程的通解。

**例 2** 用积分因子法求方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x(1+y^2)}{(1+x^2)y}$ 的通解.

**解** 原方程可化为

$x(1+y^2)dx-(1+x^2)ydy=0$，有

$p_1(x)=x,q_1(y)=1+y^2,p_2(x)=1+x^2,q_2(y)=y$

即积分因子为

$$\mu(x,y)=\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)},$$

可得恰当微分方程：$\dfrac{x}{1+x^2}dx-\dfrac{y}{1+y^2}dy=0$，

用积分比对法得到此方程的通解为

$$1+y^2=c(1+x^2),(c\neq 0).$$

**2.3 齐次微分方程及其解法**

形如

$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (2.8)$$

当令 $u=\dfrac{y}{x}$ 时，$g(u)$ 是关于 $u$ 的连续函数，这种方程是齐次微分方程。

下面给出齐次微分方程的解法：

（1）变量变换法

作变量变换 $u=\dfrac{y}{x}$，即有 $\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{du}{dx}+u$，将这两个式子代入（2.8）中，则原方程化为

$$x\frac{du}{dx}+u=g(u),$$

整理得到

$$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x},$$

最后按变量分离法求解。

（2）积分因子法

齐次微分方程（2.8）可写为

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的形式，又可化为

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$，对比（2.8），有 $g(\dfrac{y}{x})=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$，

现令 $\dfrac{y}{x}=u$，代入（2.8）中有 $[\mathrm{u}-g(u)]dx+xdu=0$，这为一个变量分离方程，所以由 2.2.1 中的（2）可知，它的一个积分因子是 $\mu_1(x,y)=\dfrac{1}{x[u-g(u)]}$，将 u 代进上式，并乘 $\dfrac{1}{Q(x,y)}$，得（2.8）的积分因子为

$\mu(x,y)=\dfrac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)}$，再用 2.1 的（一）中的方法求解。

**例 3** 用积分因子法求方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x}$ 的通解。

**解** 原方程化为 $(x+y)dx-xdy=0$，且

$P(x,y)=x+y,Q(x,y)=-x$，所以有积分因子

$\mu(x,y)=\dfrac{1}{x^2}$，将上式左右同乘以此积分因子，得到恰当微分方程

$$\frac{x+y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy=0,$$

再用积分比对法，得到原方程的通解为

$$y=x(\ln x+c)(c\text{为任意常数}).$$

**2.4 一阶线性微分方程及其解法**

形如

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)\text{，（2.9）}$$

且 $P(x),Q(x)$ 是连续函数，称这是一阶线性微分方程。

若 $Q(x)=0$，即

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y\text{，（2.10）}$$

这个方程就是一阶齐次线性微分方程。

又 $Q(x)\neq 0$，即为方程（2.9），这种方程是一阶非齐次微分方程。

2.4.1 一阶齐次线性微分方程的解法

（1）分离变量法

观察方程（2.10）也为一个变量分离方程，按照分离变量法求解得到（2.10）的通解为

$$y=ce^{\int P(x)dx}(c\text{为任意常数}).$$

（2）积分因子法

对于方程（2.10），可化为 $P(x)ydx-dy=0$，其中

$$M(x,y)=P(x)y,N(x,y)=-1\text{，}$$

且有 $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-P(x)$，所以方程（2.10）有只与 $x$ 有关的积分因子[1]，为 $\mu$（$x,y$）$=e^{\int -P(x)dx}$，将方程（2.10）左右同乘以积分因子得到恰当微分方程

$$e^{\int -P(x)dx}P(x)ydx-e^{\int -P(x)dx}dy=0\text{，}$$

再用 2.1 的（一）中的分项组合法求解，即得到方程（2.10）的通解为

$$y=ce^{\int P(x)dx}(c\text{为任意常数}).$$

（3）还原法

当 $y\neq 0$ 时，有 $\dfrac{dy}{dx}-P(x)y=0$，可化为

$$\frac{y'}{y}-P(x)=0\Leftrightarrow(\ln|y|)'-[\int P(x)dx]'=0\Leftrightarrow(\ln|y|)'-[\ln e^{\int P(x)dx}]'=0\Leftrightarrow\left[\ln\frac{|y|}{e^{\int P(x)dx}}\right]'=0$$

即有

$$\ln\frac{|y|}{e^{\int P(x)dx}}=c_0\Leftrightarrow \mathrm{y}=\pm e^{c_0}\cdot e^{\int P(x)dx}\text{，}$$

又令 $\pm\mathrm{e}^{c_0}=c$，即 $c\neq 0$，得到 $y=ce^{\int P(x)dx}$（$c\neq 0$）.此外，$y=0$ 显然也是（2.10）的解，此时 $c=0$，综上所述，（2.10）的通解为

$$y=ce^{\int P(x)dx}(c\text{为任意常数}).$$

**例 4** 用积分因子法求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=y\sin x$.

**解** 此方程的积分因子是

$\mu(x,y)=e^{\int -\sin xdx}=e^{\cos x}$，此时得到一个恰当微分方程

$$e^{\cos x}y\sin xdx-e^{\cos x}dy=0\text{，}$$

再由分项组合法求解，即得到原方程的通解为

$$y=ce^{-\cos x}(c\text{为任意常数}).$$

2.4.2 一阶非齐次线性微分方程的解法

（1）常数变易法

通过观察，知道 $\dfrac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$ 的特殊情况是 $\dfrac{dy}{dx}=P(x)y$，现把 $\dfrac{dy}{dx}=P(x)y$ 的通解 $y=ce^{\int P(x)dx}$ 中的 $c$ 变易为关于 $x$ 的函数 $c(x)$，即有

$$y=c(x)e^{\int P(x)dx}\text{，（2.11）}$$

现求 $c(x)$,将（2.11）左右对 $x$ 微分得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dc(x)e^{\int P(x)dx}+c(x)P(x)e^{\int P(x)dx}dx}{dx}=\frac{dc(x)}{dx}e^{\int P(x)dx}+c(x)P(x)e^{\int P(x)dx}$$

，

将上式和（2.11）代入一阶非齐次线性微分方程（2.9）中，得

$$\frac{dc(x)}{dx}e^{\int P(x)dx}+c(x)P(x)e^{\int P(x)dx}=c(x)P(x)e^{\int P(x)dx}+Q(x)$$

，

有 $\dfrac{dc(x)}{dx}=Q(x)e^{\int -P(x)dx}$，左右积分得

$$c(x)=\int Q(x)e^{\int -P(x)dx}dx+c(c\text{为任意常数})，$$

（2.12）最后将上式代入（2.11），即得到一阶非齐次线性微分方程（2.9）的通解

$$y=e^{\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int -P(x)dx}dx+c)(c\text{为任意常数})$$

（2）积分因子法

方程（2.9）的积分因子也为 $\mu(x,y)=e^{\int -P(x)dx}$，将（2.9）左右同乘以此积分因子，有

$$y'e^{\int -P(x)dx}-P(x)ye^{\int -P(x)dx}=Q(x)e^{\int -P(x)dx}，$$

（2.13）

由分项组合法，即有 $(ye^{\int -P(x)dx})'=Q(x)e^{\int -P(x)dx}$，左右积分得

$$ye^{\int -P(x)dx}=\int Q(x)e^{\int -P(x)dx}dx+c，$$

则通解为

$$y=e^{\int -P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int -P(x)dx}dx+c\right](c\text{为任意常数})$$

.

（3）还原变易法

当 $y\neq 0$ 时，有

$$y'-P(x)y=Q(x)\Leftrightarrow \frac{y'}{y}-P(x)=\frac{Q(x)}{y}\Leftrightarrow (\ln|y|)'+\left[\ln e^{\int -P(x)dx}\right]'=\frac{Q(x)}{y}$$

，

$$\Leftrightarrow \ln(|y|e^{\int -P(x)dx})=\int\frac{Q(x)}{y}dx\Leftrightarrow y=c(x)e^{\int P(x)}$$

（其中 $c(x)=\mathrm{e}^{\pm\int\frac{Q(x)}{y}dx}$），

又由（1）的常数变易法知，（2.9）的通解为

$$y=e^{\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int -P(x)dx}dx+c)，$$

这里的 $c(x)=\int Q(x)e^{\int -P(x)dx}dx+c$，即有

$$\mathrm{e}^{\pm\int\frac{Q(x)}{y}dx}=\int Q(x)e^{\int -P(x)dx}dx+c，$$

由此可以求得通解

$$y=e^{\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int -P(x)dx}dx+c)(c\text{为任意常数}).$$

（4）变量代换法

方程（2.9）可写为 $y'=P(x)y+Q(x)$，在这里由于 $y$ 的导数是两个代数式的和，我们结合导数运算的知识，知两个函数的乘积的导数也呈现出这样的关系，因此构造出 $y$ 的新函数 $y=uz$，且 $u,z$ 都是与 $x$ 有关的函数，现将此 $y$ 代入原式中有

$$uz'+[u'-uP(x)]z=Q(x)，\quad（2.14）$$

此时我们注意到 $u'-uP(x)=0$ 时，此方程为一个变量分离方程，所以求得 $u=e^{\int P(x)dx}$，此时（2.14）可以化简 $uz'=Q(x)$，将 $u$ 代入其中，可求得 $z=\int Q(x)e^{\int -P(x)dx}dx+c$，最后将 $u,z$ 代入 $y=uz$ 中，即求得（2.9）的通解为

$$y=e^{\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int -P(x)dx}dx+c)(c\text{为任意常数}).$$

**例 5** 用变量代换法求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{x+1}+(x+1)^3$.

**解** 令 $y=uz$，且 $u,z$ 都是与 $x$ 有关的函数，将它代入原方程中，有

$$uz'+\left[u'-\frac{2}{x+1}u\right]z=(x+1)^3，$$

令 $u'-\dfrac{2}{x+1}u=0$，求得 $u=(x+1)^2$，此时又有

$uz'=(x+1)^3$，将求得的 $u$ 代入其中，可求得

$z=\dfrac{1}{2}(x+1)^2+c$，最后将 $u,z$ 代入，即求得原方程的通解

$$2y=c(x+1)^2+(x+1)^4(c\text{为任意常数}).$$

2.5 伯努利微分方程及其解法

形如

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n，$$

（2.15）$n$ 为常数，但 $n\neq 0,1$，且 $P(x),Q(x)$ 是 $x$ 的连续函数，这种是伯努利微分方程。

下面给出伯努利微分方程的解法：

（1）变量变换法

若 $y\neq 0$，将（2.15）两边同除以 $y^n$，得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=y^{1-n}P(x)+Q(x)\text{，}\quad(2.16)$$

现做变量变换，令 $z=y^{1-n}$，有

$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$，现将 $z$ 和此式代入（2.16）中，得到

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)\text{，}$$

（2.17）这是一个一阶非齐次线性微分方程，再用 2.4.2 里面的方法求解，最后代回变量，就可求得（2.15）的通解，为

$$y=e^{\int P(x)dx}\left[(1-n)\int Q(x)e^{(n-1)\int P(x)dx}dx+c\right]^{\frac{1}{1-n}}\text{，}$$

又 $n>0$ 时，$y=0$ 也是（2.15）的解。

（2）积分因子法

由（1）的求解过程知，变量替换后可得到方程（2.17），所以此方程的积分因子为 $\mu(x,y)=e^{(n-1)\int P(x)dx}$，将（2.17）左右乘以积分因子，得到恰当微分方程

$$e^{(n-1)\int P(x)dx}[(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)]dx-e^{(n-1)\int P(x)dx}dz=$$

由分项组合法，求得（2.17）的通解

$$z=e^{(1-n)\int P(x)dx}\left[(1-n)Q(x)e^{(n-1)\int P(x)dx}+c\right]\text{，}$$

最后代回原来的变量，即得到方程（2.15）的通解为

$$y=e^{\int P(x)dx}\left[(1-n)\int Q(x)e^{(n-1)\int P(x)dx}dx+c\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

又 $n>0$ 时，$y=0$ 也是（2.15）的解。

（3）变量代换法

将方程（2.15）写为 $y'=P(x)y+Q(x)y^n$，从 2.4.2 中解法 5 的分析过程知 $y$ 为两个关于 $x$ 的函数的乘积，即令 $y=u(x)v(x)$，后面的步骤和 2.4.2 中的解法 5 一样，这里就不再阐述，最后求得

$$u(x)=\left[(1-n)\int Q(x)e^{(n-1)\int P(x)dx}dx+c\right]^{\frac{1}{1-n}}\text{，}\quad v(x)=e^{\int P(x)}$$

通解为 $y=e^{\int P(x)dx}\left[(1-n)\int Q(x)e^{(n-1)\int P(x)dx}dx+c\right]^{\frac{1}{1-n}}$，

又 $n>0$ 时，$y=0$ 也是（2.15）的解。

**例 6** 用变量代换法求解方程 $\frac{dy}{dx}=-xy+x^3y^3$.

**解** 令 $y=u(x)v(x)$，将它代入原方程中，有

$$u(x)v(x)+u(x)\left[v'(x)+xv(x)\right]z=x^3u^3(x)v^3(x)$$

，

令 $v'(x)+xv(x)=0$，求得 $v(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$，此时上式化简为 $u(x)v(x)=x^3u^3(x)v^3(x)$，

将 $v(x)$ 代入其中，有

$u(x)=(-2\int x^3e^{-x^2}dx+c)^{-\frac{1}{2}}$，把 $u(x),v(x)$ 代回 $y$ 中，就得到题中方程的通解。

但 $u(x)$ 中的积分不易求出，所以解此题时，不建议用此解法，此解法只是提供一些解题思路。

## 3 一阶微分方程的应用

许多有关一阶微分方程的问题都出现在物理学、医学、化学、生物学等学科领域，而且一阶微分方程与数学的其他分支，比如几何学，以及物理学中的机械振动、的关系都很紧密，它们相互影响和促进.因此很多实际问题需要依靠一阶微分方程来解决。现给出一阶微分方程在医学中的应用。

### 3.1 一阶微分方程在医学中的应用

由于科技的持续数学化发展，医学也不断朝着数学化模式发展，运用数学的方法有效地处理医学中的各种问题，已成为当今医学发展的一种方向。

**例 7** 对于无移除的流行病模型，假定模型为：（1）团体总人数为 $N$，且是封闭的,开始时只有一个感染者；（2）团体成员相互接触传播病毒造成感染，感染者不会被移除；（3）易感者成为感染者的变化率与当时的易感人数和感染人数的乘积成正比，比例系数为 $\beta$.若时刻 t 的感染人数为 $I$,易感人数为 $S$。试分析此病例最终的结果。

**解** 根据以上假设有初始条件 $S+I=N,I(0)=1$，现可建立一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}S}{dt}=-\beta SI\Leftrightarrow\frac{\mathrm{d}S}{dt}=-\beta S\text{（}N-S\text{），}$$

这是一个变量分离方程,分离变量并积分得

$\frac{1}{N}\ln\frac{S}{N-S}=-\beta t+c$，根据初始条件有

$c=\frac{1}{N}\ln(N-1)$,代入上式并整理后得到

$$S=\frac{N(N-1)}{(N-1)+e^{\beta Nt}}\text{，}$$

当$t \to \infty$时，$S(t) \to 0$，从而$I(t) \to N$,这表明此团体的成员终将全部感染此流行病病毒。

**3 结束语**

在本文对这五类常见一阶微分方程的求解方法及应用的讨论与探索中，我们发现每种类型的方程都有多种解题思路。对于求解恰当微分方程的三种方法，不定积分法过程较为繁琐，而积分比对法较简单；对于求解一阶非齐次线性微分方程的四种方法，还原变易法实际上是以常数变易法为基础，只是分析思路不同，所以相比之下这种方法的解题步骤较繁琐，但在伯努利微分方程的求解中虽然变量代换法的步骤不算繁琐，可是会出现例子里面不定积分不易算出的情况，所以在求解一阶微分方程时，要具体问题具体分析，选择最简单恰当的一种方法求解。

通过本文的研究，我学习到了很多解题的思路和思想方法，并且通过查询资料、文献检索等，使本次研究变得更加丰富与有意义。

## 参考文献：

[1] 王高雄,周之铭等.常微分方程(第三版)[M].北京:高等教育出版社,2006:30-70.

[2] 文武.一些特殊类型的一阶微分方程的解法探讨[J].四川文理学院学报,2010(9).

[3] 王晓玲.关于一阶微分方程各类解法的研究[J].数学学习与研究,2012(9).