基于 GeoGebra 平台探究祖暅原理推导球体体积

胡孟飞

扬州大学数学科学学院 江苏 扬州 225009

【摘　要】：当前教育改革提出加强教育教学和信息技术的融合。以“祖暅原理推导球体体积”为例，展示动态数学软件 GeoGebra 在中学数学教学中的应用。利用 GeoGebra 的 3D 绘图功能，直观地呈现出球体体积的推导过程；通过演示猜想的动态过程和验证，帮助学生发现变化中的不变性，体会数形结合思想。在这个软件支撑下的数学探究活动课，满足了学生的好奇心，激发了学生的数学学习兴趣提高课堂效率，发展了学生的直观想象素养。

【关键词】：信息技术；球体体积；祖暅原理；GeoGebra

Based on the GeoGebra Platform to Explore the Zuxuan Principle to Derive the Volume of the Sphere

Mengfei Hu

Yangzhou University School of Mathematical Sciences Jiangsu Yangzhou 225009

Abstract: The current education reform proposes to strengthen the integration of education teaching and information technology. Taking "Zu Wei's Principle to Derive the Volume of a Spheroid" as an example, the application of the dynamic mathematics software GeoGebra in middle school mathematics teaching is shown. Using GeoGebra's 3D drawing function, the derivation process of the volume of a sphere is visually presented; by demonstrating the dynamic process and verification of conjectures, it helps students discover the invariance in changes and experience the idea of combining numbers and shapes. The mathematics inquiry activity class supported by this software satisfies the students' curiosity, stimulates the students' interest in mathematics learning, improves the classroom efficiency, and develops the students' intuitive imagination literacy.

Keywords: Information technology; Sphere volume; Zuxuan Principle; GeoGebra

1 研究背景

人教 a 版中关于球体体积教学的内容是通过类比圆周长求圆面积的方法，利用圆的表面积公式，用极限逼近思想探究出圆的体积公式是$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$。由于极限逼近思想过于抽象，学生往往无法理解，只能机械记忆球的体积公式，出现知其然而不知其所以然的状况，不利于其空间观念和数学核心素养的培养。因此，作为新时代的教师应该顺应教育现代化的时代要求，促进自身的专业成长，积极参与信息技术和教育教学的深度融合研究，满足学生个性化学习的需要。

GeoGebra 是一个集几何、代数、图形、表格、统计、微积分功能为一体的动态数学软件，它以开源、免费等优点受到许多数学教学工作者的喜爱。借助 GeoGebra 辅助数学探究活动，可以使得探究活动更加生动有趣，教学过程更加直观，更具有启发性。

笔者以祖暅原理推导球体体积为例，结合《普通高中数学课程标准（2017 年版）》思考 GeoGebra 与数学课程融合问题。

2 探究过程

2.1 祖暅原理

祖暅是古代杰出的数学家、天文学家祖冲之之子，他在 5 世纪末提出了祖暅原理，西方直至 17 世纪才被意大利数学家卡瓦列里提出。因此祖暅原理又被西方称为卡瓦列里原理。祖暅原理提出：幂势既同，则积不容异。“势”即是高，“幂”是面积。用现代数学语言解释祖暅原理可表述为：夹在两平行平面之间的两个几何体（其中两几何体形状不一定一致），被平行于这两个平面的任意一个平面所截，如果截面（阴影部分）的面积都相等，那么这两个几何体的体积一定相等。

利用祖暅原理，可知若在某一平面内有底面积为 s，高为 h 的长方体和任意柱体，由于它们在等高处面积相同，那么它们的体积也相同。即$V_{柱体}=V_{长方体}=s gh$，这样柱体的体积公式就推导出来了。

同理，等底等高的任意锥体体积也是一样的。以三棱锥为例，利用 GeoGebra 的 3D 绘图区作出三棱柱和其平移，向量等工具作出三棱柱切割出来的 3 个棱锥，如图 2 所示。三棱锥$A-A^{'}BC$和三棱锥$B'-A'BC$同底，底面积相同，假设 C 到平面$ABB^{'}A^{'}$为 h，那么由祖暅原理，可以知道$V_{A-A^{'}BC}=V_{B'-A^{'}BC}$；同理可知$V_{B'-A'BC}=V_{C'-A'B'C}$。那么可知图 2 三棱柱切割出来的三个棱锥体积是一样的，有$V_{柱体}=3V_{锥体}=3s\bullet h$，可以推知锥体体积公式为$V_{锥体}=\frac{1}{3}s\bullet h$。

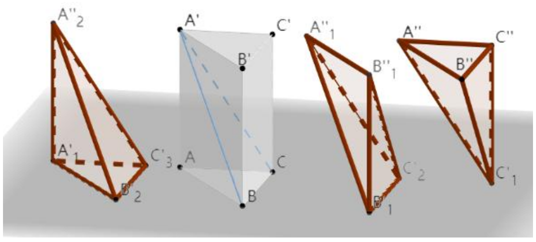

图 1 三棱柱及其切割体示意图

2.2 球体体积公式推导

通过球、圆柱、圆锥体积关系代数表达式发现，若有一圆柱和圆锥，底面圆半径和高的长度都是 R，数学表达式为 $V_{球}=V_{圆柱}-V_{圆锥}=2(\pi R^3-\frac{1}{3}\pi R^3)=\frac{4}{3}\pi R^3$。文字叙述就是：圆柱的体积减去圆锥的体积的 2 倍刚好等于半径为 R 的球的体积。那么构造如图 2 所示球、圆柱和圆锥立体图（其中右边图形为圆柱挖去圆柱剩余部分），可知若有一平行于 $x0y$ 的平面，当它横截面如图 2 所示图形时，得到的两个横截面面积是相等的，结合祖暅原理可知球的体积公式可以利用圆柱和圆锥体积公式推导。这种推导球的体积公式方法对于学生而言，更加直观，易于理解。

下面笔者将基于 GeoGebra 平台构造符合上述条件的几何体动态演示利用祖暅原理推导球体的体积的探究过程。

2.2.1 构造情境

打开 GGB 软件，在代数区输入“球面((0,0,0),2)”，得到一个圆心为原点，半径 R=2 的半球体；接着输入“圆柱((5,0,0),(5,0,2),2)”，得到底面半径 R=2，高 h=2 的圆柱；接着输入“圆锥((5,0,2),(5,0,0),2)”，得到底面圆心为(5,0,2)，高 h=2 的圆锥；如图 2 所示。

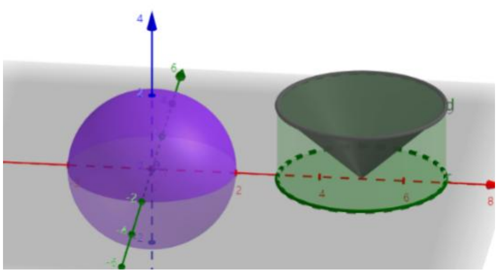

图 2 球、圆柱、圆锥示意图

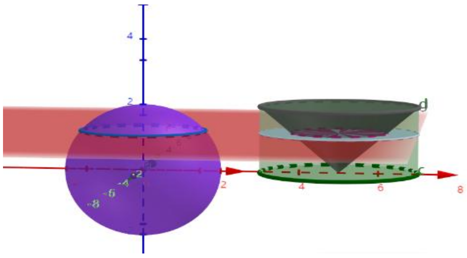

图 3 平面切割几何体示意图

2.2.2 探究推导

首先，创造一个平行平面横截球、圆柱和圆锥。在绘图区中创建滑动条 h，将其数值参数修改为 0 到 2，使其在 z 轴正方向变化，得到 $z=h$ 如图红色平面。再利用工具栏中的相交曲线功能，构造 $z=h$ 平面与球、圆柱和圆锥的相交曲线。可以看出平面和球的横截面为圆，平面和圆柱、圆锥横截面为浅蓝色圆环，如图 3 所示。

其次，度量平面和球的横截面圆，平面和圆柱、圆锥横截面圆环面积并判断它们之间的关系是否满足祖暅原理条件。利用工具栏中面积选项，分别度量平面 $z=h$ 与球、圆柱以及圆锥横截面的面积并在代数区输出（其中“i”表示平面与球横截面面积，“j”表示平面与圆柱横截面面积，“l”表示平面与圆锥横截面面积）。最后输入“$i \stackrel{?}{=} j-l$”判断等高处平面与圆柱横截面面积减去平面与圆锥横截面面积是否等于平面与球横截面面积。如图 4 所示。

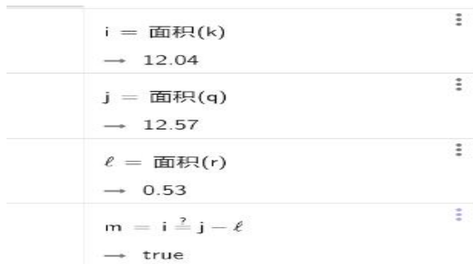

图 4 面积计算输出示意图

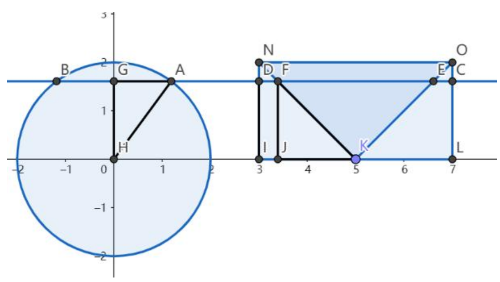

图 5 y=0 平面视图

可以发现，当 h 在 0 到 2 动态变化，即平面 z = h 变化时，上述逻辑判别式输出恒为 true，表明笔者在 GGB 中构造的平面 z = h 分别与球和圆柱切割一个圆锥形成的圆环在等高处横截面积相等。因此，利用祖暅原理，底面圆半径为 R，高为圆柱的体积减去底面圆半径为 R，高为 R 的圆锥的体积的 2 倍刚好等于半径为 R 的球的体积。

2.2.3 演绎证明

最后，通过立体图形的平面视图，利用代数计算证明其满足祖暅原理。在代数区输入 y = 0，得到 xoz 平面，作出 xoz 平面与圆柱、圆锥、半球体的相交曲线，连接 GH，GA，AH，ID，FJ；再选中 y = 0，作出其平面视图，如图 5 所示。

其中 $GH = h$，可知 $GA = \sqrt{R^2 - h^2}$，可以得到平面与球横截面的面积为 $S = \pi(R^2 - h^2)$；因为 $JK = FJ = h$，可知 $IJ = DF = R - h$，可以得到 $S_{圆环} = S_{大圆} - S_{小圆} = \pi R^2 - \pi h^2$。说明情境中构造的圆柱切割圆锥后的几何体和球在等高处的横截面积是一样的。根据祖暅原理，可知球体的体积等于圆柱减去圆锥的体积。

即 $V_{球} = 2(V_{圆柱} - V_{圆锥}) = 2(\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3) = \frac{4}{3}\pi R^3$。

以上是笔者通过 GGB 探究球和圆柱切割圆锥后形成的几何体在等高处横截面面积相等，利用祖暅原理推导球体积的探究过程。

3 总结与思考

通过上述探究过程可以看出，利用 GeoGebra 使得球的体积推导过程变得直观，克服教材中通过类比极限思想推导过于抽象的难点。由此可见，现代教育倡导将信息技术融入数学教育中具有非常大的价值。

首先，提高了学生的学习兴趣。GeoGebra 最特色的功能就是 3D 绘图，它充分地体现了数形结合的思想，将原来枯燥无趣的数学变得生动有趣，是一个高效的教学辅助工具。对于我们的中学教育而言，它具有非常强的实用性，应用 GeoGebra 不仅提高了教学效率，而且为数学探究课提供了良好的教学环境，为学生探究学习提供了环境。新奇的学习方式，使得原本枯燥无趣的教学过程变得生动起来，激发了学生的学习兴趣，使得学生对于数学问题有着更多的动力去探究，从而对数学知识的本质理解也更加透彻，真正学会用数学的眼光观察世界，用数学的语言表达世界，用数学的思维去思考世界。

其次，价值在于突破教学重难点，培养数学核心素养。相较同类型的数学软件几何画板，GeoGebra 不仅囊括了几何画板所具有的所有功能，而且特有的 3D 功能对于高中立体几何教学更是提供了极大的便利。它在不改变我们原有的教学结构的情况下，直观地体现出我们图形的变化过程，让学生的空间观念得到发展，同时加深了学生对知识形成过程的认识，让学生更加容易理解相关知识。教育家布鲁纳说过：“探究是数学的生命线”。数学教育除了帮助学生获得数学知识，更重要的是启发学生学会思考，学会探究。利用 GGB 等信息技术，可以放手让学生去主动地探究知识获得的过程，满足学生的求知欲，促进数学抽象等数学核心素养的形成。

最后，有利于拓展学生的思维。GeoGebra 对于中学数学教学具有非常高的实用性，特别是在高中立体几何探究课中，可以利用 GeoGebra 进行演示教学。在教学过程中，教师根据实际教学需要，合理使用 GeoGebra，可以突破教材，拓宽学生的思维，还可以节约时间，给学生提供更多的练习机会。

但是，由于 GeoGebra 近几年才从国内兴起，在职老师从传统课堂教学模式转变到利用信息技术辅助教学还需要一定时间；而且，目前我国中学教育信息技术的重视程度不够，学生没有机会去接触使用 GeoGebra 这一类数学软件。但从教育发展的目的为培养人而言，笔者认为，利用推进 GeoGebra 在中学数学中融合教学的研究是十分有必要的。

参考文献：

[1] 张伊,谢永清,王双兵.CABRI 助力“探究与发现”的教学--以“祖暅原理与柱体、锥体的体积”为例[J].中国数学教育,2020(12):25-30.

[2] 姚宽宽.GeoGebra 在高中数学教学中的应用与思考[J].中学课程辅导(教师教育),2020(17):125.

作者简介：胡孟飞，1995.8，女，四川宜宾人，扬州大学数学科学学院学科数学专业，在读硕士。