

# 浅谈几何画板下的分形图形

## ——以科赫曲线为例

杨子颖

扬州大学数学科学学院 江苏 扬州 225009

**【摘要】**：分形几何——广泛存在的一类无规则、支离破碎却有自相似结构的复杂形状或现象。随着分形几何逐渐走进中学数学，本文将借助几何画板的迭代功能，以科赫曲线为例创设数学情境来简单探讨一下生成元的改变对分形图形的影响及分形几何与中学数学融合的意义。

**【关键词】**：分形；生成元；科赫曲线；几何画板

### A Brief Introduction to Fractal Figures under a Geometric Drawing Board --Take the Koch Curve as an Example

Ziying Yang

School of Mathematical Science of Yangzhou University Jiangsu Yangzhou 225009

**Abstract:** Fractal geometry -- a widespread class of irregular, fragmented, complex shapes or phenomena with self-similar structures. With fractal geometry gradually into middle school mathematics, this paper will use the iterative function of geometric drawing board, take Koch curve as an example to create a mathematical situation to simply discuss the influence of the change of generators on fractal graphics and the significance of the integration of fractal geometry and middle school mathematics.

**Keywords:** Fractal; Generating element; Koch curve; Geometric drawing board

#### 1 问题的提出

分形学源于法国数学家曼德尔勃罗特（Benoit B.Mandelbrot）上世纪70年代对英国海岸线有多长的研究，以自然界中如粒子运动、云彩边界、星体分布等传统欧式几何学无法揭示出其本质的无规则形状或现象为研究对象，继1975出版《分形——形、机遇和维数》后正式开创了分形几何学<sup>[1]</sup>。分形出自拉丁语 *fractus*（意思为不规则的、破碎的或断裂的），曼德尔勃罗特曾先后从维数、自相似性给出定义<sup>[2]</sup>，但是这两种定义都存在了一定的局限性。目前学术界倾向于将分形归为具有某些性质的集合，被广为接受的集合描述来自英国数学家法内科尔（Kenneth Falconer）<sup>[3]</sup>，定义中界定了分形“在多数情况下可能是由一个生成元通过迭代方式产生的”。

迭代作为几何画板上的一个重要功能，包括迭代和深度迭代。类似于数学上的函数是由原像到像的映射，迭代是指按照一定的迭代规则从原像到初象的反复映射过程，这一过程需要手动设置迭代次数从而确定迭代深度；深度迭代则是一种带参数的迭代，只需进行迭代前新建参数，然后按住 Shift 键选择深度迭代即可实现通过改变参数值而改变迭代深度。

本文研究以科赫曲线的生成过程为例，基于几何画板的迭代功能利用生成元生成分形图形，并分析生成元的改变对分形图形的影响，以此研究分析几何与中学数学融合的意义。

#### 2 几何画板下的科赫曲线

##### 2.1 科赫曲线的价值

科赫曲线是瑞典数学家科赫1904年所发表论文中构造的曲线，该曲线是一条可以利用几何直观表示且处处不可微的连续曲线，依据科赫曲线的构造思想，科赫在论文中论证了其两个特性，一是科赫曲线的不可求长性，二是无限长度的科赫曲线所围成面积的有限性<sup>[1]</sup>。科赫曲线的不可求长性这一结论对后来曼德尔勃罗特研究英国海岸线长度产生了重要影响，该研究直接推动了分形几何的创立。在曼德尔勃罗特发表的论文“英国海岸线有多长”中指出海岸线长度随着测量精度的增加而不断增长，该长度是不确定的。除此之外，由科赫曲线所衍生的科赫雪花模型中，其“无穷大”的边界包围着有限的面积的结论也体现了这种“无限却有界”的思想<sup>[4]</sup>。科赫曲线的诞生引起了数学家们巨大的兴趣，基于科赫曲线所具备的自相似性，波兰数学家谢尔宾斯基将其由低维推广到了高维创造了谢尔宾斯基三角形。

##### 2.2 科赫曲线的制作

科赫在其发表的论文“在初等几何中构造一条没有切线的连续曲线”中简易地构造了一条曲线，其构造思想是由一个单位区间三等分后以中间段为底边构造等边三角形，继而去除底边变成四条折线，再以这四条折线为单位区间重复以上步骤无限操作所形成的折线的极限即为科赫曲线<sup>[3]</sup>。基于此描述，可知科赫曲线（图1）可以看作由图2无限迭代的结果，利用几

何画板的迭代功能绘制该科赫曲线<sup>[5]</sup>，这里的图2称为科赫曲线的生成元。

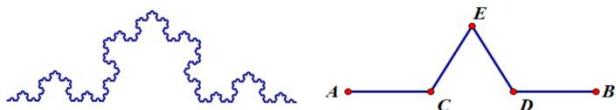


图1 科赫曲线

图2 科赫曲线的生成元

具体操作过程如下：首先绘出科赫曲线的生成元（图2），选中点A和点B，利用变换菜单中的迭代功能，选择原象A→映象A，原象B→映象C，随后在结构处添加新的映射C→E；E→D；E→D；D→B，在显示处可以手动选择迭代次数为一次得到图3。

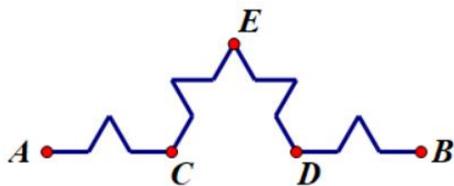


图3 生成元迭代一次所得图形

然而这样迭代所得的科赫曲线的迭代深度一旦确定则无法再更改，为了实现迭代深度可以随意按照学习者意愿变换的目的，所以笔者将添加参数n，并利用Shift键对科赫曲线的生成元进行深度迭代，将参数与迭代深度建立联系，通过任意改变n的值得到迭代n次的图形，下面图4、图5分别显示的是迭代3次和迭代5次的图形。

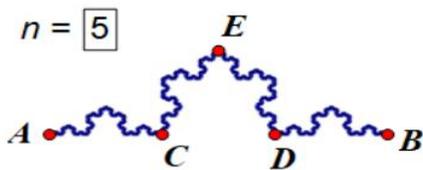


图4 生成元迭代三次所得图形

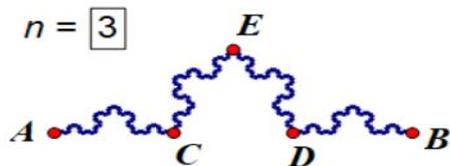


图5 生成元迭代五次所得图形

上述例子给出了在几何画板中利用生成元通过深度迭代构造分形图形的简单有效的操作方法。

### 2.3 科赫曲线的延伸

根据上面利用几何画板的迭代功能生成科赫曲线的过程，不难发现分形图形的形状是在其生成元的基础上通过反复迭代而生成的图形，那么分形图形和其生成元存在怎么样的关系呢？下面笔者将对科赫曲线的生成元作出四种改变，利用几何

画板绘制出改变后的四种生成元所产生的分形图形。科赫曲线生成元是由三等分线段的中间段构造等边三角形并去掉中间段所形成的过程，下面将保留其三等分线段以中间段为基构造图形后去掉中间段的规则，依次改变为构造直角朝左下方放置的等腰直角三角形、构造直角朝右下方放置的等腰直角三角形、构造正方形以及构造钝角为120°朝左下方放置的钝角三角形得到新的生成元如下图6。

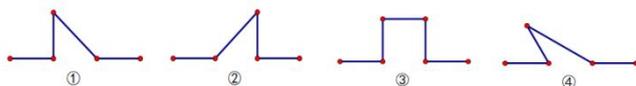


图6 进行四种改变所得生成元示意图

对于图6经过不同改变后所形成的四种新生成元，经过几何画板的迭代功能进行反复迭代后依次得到分形图形如下图7。



图7 四种生成元反复迭代所得分形图形

观察图6、图7，不难发现虽然经过改变后四种新生成元都是在科赫曲线的生成元基础上进行了细微的变动，但是这样细微的变动将经过反复迭代后产生巨大的变化。同时，在上述对生成元进行改动变成新的分形图形的过程中可以得知分形图形的形状取决于其生成元。

## 3 分形几何与中学数学融合的意义

### 3.1 激发学生学习数学的兴趣

在上述科赫曲线及其变形的生成过程中，不难发现分形图形的结构是复杂的，但其任意小的一个局部都有其内在的秩序，有自相似结构。区别于枯燥的数学定义和数学符号、公式，分形具有的结构嵌套性，能激发学生对数学世界的探索，可以增进学生对数学的学习兴趣。

### 3.2 发展学生数形结合的能力

中国著名学者周海中教授认为：分形几何不仅展示了数学之美，也揭示了世界的本质，还改变了人们理解自然奥秘的方式。不同于抽象的传统欧式几何，分形几何来源于自然界中的客观事物，我们的身边不乏各种各样的分形素材，这些都是具体的、看得见、摸得着的生动事物。将生动具体的分形几何融合在中学数学教学中，不仅为抽象单调的数学学习注入活力，而且有利于培养学生数形结合的能力。可以在数学教学过程中引导学生观察当利用科赫曲线的生成元稍作改动后，经过迭代生成的曲线宛若海岸线……在有目的的训练下，能有效发展学生的数形结合能力，使学生学会用数学的眼光观察现实世界，感受数学与自然的融合，自主去探索挖掘大自然中的数学美。

### 3.3 提升学生的创新精神

分形几何基于传统欧式几何无法解释自然界所存在的许多无规则的客观事物而创立,其本身就是一个充满创造性的过程。它不再局限于规则的图形和整数维数,无疑对学生头脑中固化的维数观念产生强大冲击,这种对传统观念的突破很大程度能激发学生创新思维的形成。同时,分形几何的整体和其局部之间的自相似结构,利用几何画板的迭代功能由任意一个生成元通过迭代形成分形图形的过程也是一个创新的过程,可以引导学生对生成元进行任意改动后通过迭代生成分形图形,在这样一个创造分形图形的过程无疑对提升学生创新精神大有裨益。

### 3.4 将信息技术与数学学习有效融合

当前信息技术与数学学习的融合只停留在教师利用多媒体演示教学内容从而辅助教师教学,但真正意义上的多媒体教学应达到帮助学生更好理解、更深刻认识所学知识,甚至实现学生自己利用多种媒体的手段去进行数学学习。将分形几何引入中学数学课本,在教师利用几何画板向学生展示分形图形形成过程中不仅有助于学生直观、清晰地认识到分形几何的自相

似结构从而实现更深刻的理解和认识,而且有助于引导学生自己利用几何画板去创造分形图形,向学生渗透利用信息技术去学习数学的观念。

## 4 小结

本文从分形几何的起源入手,在了解曼德尔勃罗特对分形的两个定义存在的局限性后,从现在学术界广为接受的法内科尔对分形的定义上得出分形在多数情况下可能是由一个生成元通过迭代方式产生的。随后在介绍了几何画板的迭代功能后,明确了本文研究是以科赫曲线的生成过程为例,基于几何画板的迭代功能利用生成元生成分形图形,并探讨生成元的改变对所生成分形图形的影响。经过对科赫曲线的生成元进行不同的四种改变后,利用几何画板对其进行反复迭代生成新的四种分形图形的过程,可以得知对生成元进行细微的改变将导致其反复迭代后所生成的分形图形产生巨大的变化。进而分析生成具有规律性、创造性的分形几何与中学数学的融合,不仅可以为枯燥的数学学习增添乐趣,而且对培养学生数形结合能力,引导学生利用几何画板自主去创造分形图形,发展学生会用数学的眼光去观察现实世界具有积极意义。

## 参考文献:

- [1] 江南.分形几何的早期历史研究[D].西北大学,2018.
- [2] 柳恒.分形海岸线数学模型在建筑设计中的运用[D].天津大学,2012.
- [3] 江南,曲安京.自相似理论的形成和发展史实考源[J].中国科技史杂志,2019,40(03):366-375.
- [4] 郑宏超.奇妙的科赫雪花曲线--例谈初中数学拓展课的设计[J].中学教学参考,2017(08):4-5.
- [5] 陈永胜.“几何画板”在分形几何中的应用[J].吉林师范大学学报(自然科学版),2005(01):111-112.

作者简介:杨子颖,1998.11,女,广东中山人,扬州大学数学科学学院学科教学(数学)专业,在读硕士。