建系建模寻找方法，归类探究培养思路

——暨核心素养下学生思维能力的培养探究拾零

江　雨

绩溪县适之中学 安徽 宣城 245300

【摘　要】：数学的建模对于学生来说是非常重要的，也是学生系统学习数学的有效途径和方法，对于学生的思维能力培养起到至关重要的作用。

【关键词】：建模；核心素养；一题多解

Establish Modeling and Searching Methods, Classify and Explore Training Ideas

-- Probe into the Cultivation of Students' Thinking Ability under the Core Literacy

Yu Jiang

Jixi Shizhi Middle School Anhui Xuancheng 245300

Abstract: Mathematical modeling is very important for students, and it is also an effective way and method for students to learn mathematics systematically. It plays a vital role in cultivating students' thinking ability.

Keywords: Modeling; Core literacy; Multiple solutions to one problem

前言

对我的那班大学里都是叶老师所带出来的师兄弟们，真的是佩服到五体投地的地步，他们竟然“内卷”到了连清明节假期封控在家里也积极地在群里探讨研究数学问题，加上我们的辅导员叶鸣老师更是分别站在一名初中教师、高中教师、大学教授的各个身份角色去解析题目，并高屋建瓴地给我们提供一些比较系统、科学、有效的解题方法以及解题思路，真的是应了总书记那句话——一个人遇到好老师是人生的幸运。尽管我只在黄山学院数学系就读了两年，但在这两年却让我遇到了一生中最好的老师和同学，由此才开辟了我一生的数学教育生涯。

下面我和大家来分享一下这次他们探讨的题目，原型如下：

已知 D 是等边三角形 ABC 内一点，且∠BDC=120°,M 是 BC 的中点。

（1）证明：AD=2DM；　　（2）求 $\dfrac{BD}{DM}$ 的最大值.

解析：首先这道题的第一个问我们想到的是“倍长中线法”和“旋转构造法”。

方法一：将△BDC 绕点 B 逆时针旋转 60°得△BFA，连结 DF；延长 DM 到 E，使得 ME=DM，连结 CE。

由旋转可得△BFA≌△BDC ⟹ BD=BF　FA=DC　∠BFA=∠BDC=120° ⟹

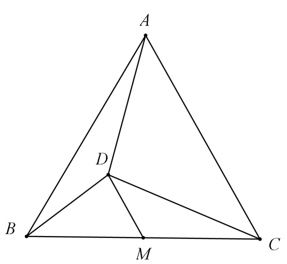
△BFD 为等边三角形⟹ FD=FB =BD ∠BFD=60° ⟹ ∠AFD=60°

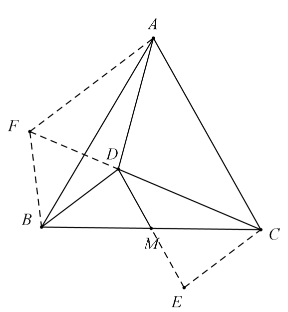
由“倍长中线”⟹ △BDM≌△CEM ⟹ CE=BD=DF ∠ECM=∠DBC

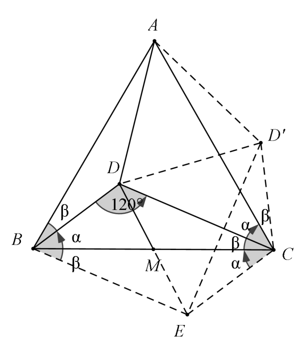
⟹∠DCE=∠DCM+∠ECM=∠DCM+∠DBC=180°-∠BDC=180°-120°=60°

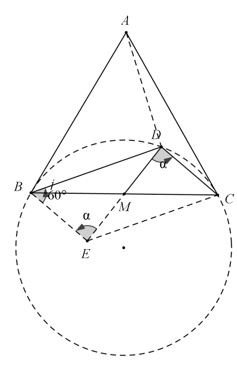
⟹ ∠AFD=∠DCE=60° ⟹ △AFD≌△DCE⟹AD=DE=2DM，即 AD=2DM. 得证！

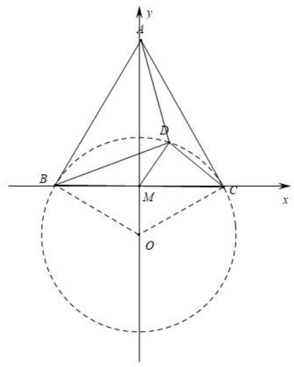
方法二：第一步“倍长中线法”构造全等的思路和方法一是相同的。











①延长 DM 到 E，使得 ME=DM，连结 CE、BE $\Rightarrow$ BDCE 为平行四边形 $\Rightarrow$ BD=CE；

②将△ADB 绕点 A 逆时针旋转 60°得△AD'C，连 DD' $\Rightarrow$ BD=CD' △ADD，等边三角形；

③连接 ED'，在△CD'E 中，CD'=BD=CE $\Rightarrow$ △CD'E 为等腰三角形。

∠ECD=∠ECB+∠DCB=α+β=60°=∠DCD' $\Rightarrow$ CD 为∠EC D'的角平分线

$\Rightarrow$ CD 是 E D' 的中垂线 $\Rightarrow$ DE=DD'=DA $\Rightarrow$ DE=2DM=AD 即 AD=2DM.得证！

方法三：这道题我们也可以利用高中的解析几何来解决。利用定弦定角，即点 D 的轨迹为圆（阿氏圆）∠BDC=120°

$\Rightarrow$ ⊙O 的半径为$\dfrac{BC}{\sqrt{3}}$.

如上右图建立坐标系，以点 M 为原点，以 BC 所在的直线为 x 轴，以 MA 所在的直线为 y 轴，不妨设 BC=2 $\Rightarrow$ 圆心 O 的坐标为（0，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$）则⊙O 的方程为$x^2+(y+\dfrac{1}{\sqrt{3}})^2=\dfrac{4}{3}$

M(0,0) A（0，$\sqrt{3}$） B（-1,0）设点 D 的坐标（x,y）(|x| $\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$)

由⊙O 的方程为

$$x^2+(y+\frac{1}{\sqrt{3}})^2=\frac{4}{3}\Rightarrow x^2+y^2+\frac{2y}{\sqrt{3}}=1\Rightarrow x^2+y^2=1-\frac{2y}{\sqrt{3}}$$

$$MD=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1-\frac{2y}{\sqrt{3}}}$$

$$AD=\sqrt{x^2+(y-\sqrt{3})^2}=\sqrt{x^2+y^2-2\sqrt{3}y+3}=\sqrt{1-\frac{2y}{\sqrt{3}}-2\sqrt{3}y+3}=2\sqrt{1-\frac{2y}{\sqrt{3}}}$$

$\Rightarrow$ AD=2DM. 得证！

第二问：

∵∠BDC=120°

∴作△BDC 的外接圆，点 D 是弧 BC 上动点。

倍长中线同上，延长 DM 到 E，使得 ME=DM，连结 CE、BE $\Rightarrow$ BDCE 为平行四边形。

$\Rightarrow$ ∠BED=∠EDC=α   ∠EBC=∠BCD

$\Rightarrow$ ∠EBD=∠EBC+∠DBC=∠BCD+∠DBC=180°-∠BDC=180°-120°=60°

在△BED 中，由正弦定理得$\dfrac{BD}{\sin\angle BED}=\dfrac{DE}{\sin\angle EBD}$

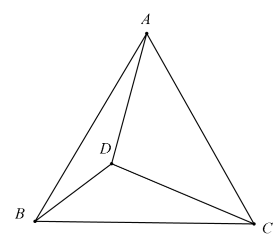
$$\Rightarrow\frac{BD}{\sin\alpha}=\frac{2DM}{\sin 60^\circ}\Rightarrow\frac{BD}{MD}=\frac{2\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

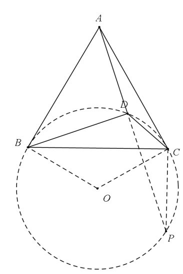
$$\Rightarrow\frac{BD}{MD}=\frac{4}{3}\sqrt{3}\sin\alpha$$

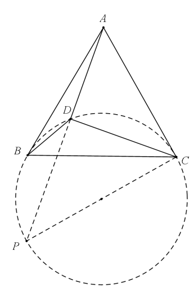
$\Rightarrow$ 当 α=90° 时，$\dfrac{BD}{MD}$的比值最大，即为$\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.

这是从平面几何的角度出发解决的，思路比较简单，可谓有四两拨千斤之功效！当然这个问题同样也可以用高中的解析几何方法来解决，也是要比平面几何方法要复杂得多，所以这里不再赘述。综合这道题，大家不难发现，我们用平面几何的方法来解决问题显得更加直观形象，通俗易懂，反而用高中的方法计算更为麻烦。这就彰显了初中平面几何培养学生的思维能力，而高中则是培养学生的解题能力，只要算出来即可。

变式训练 1：如图所示，已知点 D 是等边三角形 ABC 内一点，且∠BDC=120°，求$\dfrac{AD}{DC}$的最小值。







如图，构造△BCD 的外接圆 O，连接 OB、OC，延长 AD 交圆 O 于点 P，连接 CP。设圆 O 的半径为 r。

∠BDC=120°   ∠BOC=180°-60°=120° $\Rightarrow$ BC=

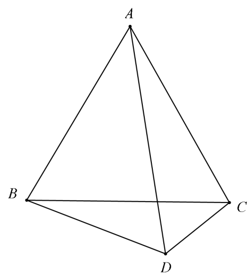
$\sqrt{3}$OB= $\sqrt{3}$r

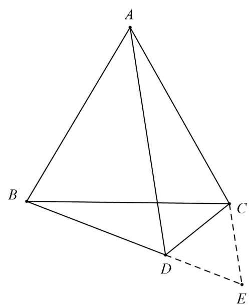
∠ACD+∠DCB=∠DCB+∠CBD=60° ⇒∠ACD=∠P

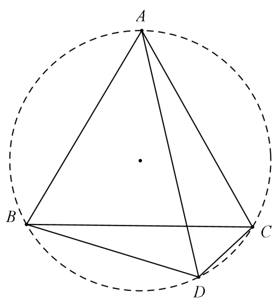
$\Rightarrow$△ACD∽△APC $\Rightarrow$ $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AC}{PC}$

AC 为定长，当 PC 最长时，$\dfrac{AC}{PC}$的值最小，此时$\dfrac{AD}{DC}$的比值最小。C 为定点，点 P 在⊙O 上运动，故当 CP 为直径时 CP 最长$\Rightarrow$ $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AC}{PC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$！

变式训练 2：已知 D 是等边三角形 ABC 外一点，∠BDC=120°，则 AD、BD、DC 三条线段有什么数量关系？







数量关系：AD=BD+DC，理由如下：（方法也有很多种，这里我挑两种来和大家分享一下）

方法一：延长 BD 至 E 使得 DE=DC 连接 CE。

∠BDC=120° ⇒∠CDE=60°

DE=DC ⇒△CDE 为等边三角形⇒CD=DE=CE ∠DCE=60°

△ABC 为等边三角形⇒AC=BC ∠ACB=60°⇒∠ACB=∠DCE

⇒∠ACB+∠BCD=∠DCE+∠BCD ⇒∠ACD=∠BCE⇒△ACD≌△BCE⇒AD=BE

⇒AD=BE=BD+DE=BD+DC⇒AD=BD+DC

这是初中平面几何种较为简单的一种解答方法。

方法二：由条件可得∠BAC+∠BDC=180° ⇒A、B、C、D 四点共圆

由托勒密定理可得 AB·DC+AC·BD=AD·BC

又 AB=BC=AC⇒AD=BD+DC

当然这种方法学生需要很强的综合平面几何知识基础，但是前面的第一种方法同学们只需要有八年级的全等知识就能解决问题。

通过以上案例的分析，我们可以知道在解决问题的过程当中，对学生核心素养的培养尤为重要，变式训练、一题多解则是较为有效的途径。

参考文献：

[1] 阿氏圆定理在 CAD 绘图中的应用[OL].2013.09

[2] 中考数学难度巅峰实际应用之阿氏圆[OL].2019.05

[3] 圆锥曲线论[M].2020.11

作者简介：江雨（1978.9-），男，汉，安徽绩溪，本科，绩溪县适之中学，一级，研究方向：初中数学。