Poisson 公式的详细证明

◆李玉荣

（武警警官学院基础部　四川省成都市　610213）

摘要：调和函数是一类重要的函数，它的边界值唯一地决定其内部的值，Poisson 公式就是用调和函数在圆周上的值来表示其圆内的值。本文利用 Cauchy 公式及 Cauchy 定理给出了 Poisson 公式的详细证明。

关键词：Poisson 公式；调和函数；Cauchy 公式；Cauchy 定理

Poisson 公式是用调和函数在圆周上的值来表示其圆内的值。它说明若已知一个闭圆上的调和函数在圆周上的值，这个调和函数在该圆内的值就唯一地确定了。

定理（Poisson 公式）设函数 $u(z)$ 在 $|z| < R_1$ 内调和，$0 < R < R_1$，则当 $|z| < R$ 时有

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R} \frac{R^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} u(\xi) d\theta \quad \xi = Re^{i\theta}$$

证明：由于 $|z| < R_1$ 是单连通区域，从而 $u(z)$ 存在共轭调和函数 $v(z)$，使得 $f(z) = u(z) + iv(z)$ 在 $|z| < R_1$ 解析，其中

$$v(z) = \int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

在 $|z| \le R$ 用 Cauchy 公式得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R} \frac{\xi f(\xi)}{\xi - z} d\theta \quad ①$$

由于 $\xi\bar{z} < R^2 = \xi\bar{\xi}$ 因而 $\xi \ne \frac{R^2}{\bar{z}}$，即函数 $\frac{f(\xi)}{\xi - \frac{R^2}{\bar{z}}}$ 在 $|z| \le R$ 上解析，由 Cauchy 定理有

$$\int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - \frac{R^2}{\bar{z}}} d\xi = \int_{|\xi|=R} \frac{\bar{z} f(\xi)}{\xi\bar{z} - \xi\bar{\xi}} \xi \square i d\theta = i\int_{|\xi|=R} \frac{\bar{z} f(\xi)}{\bar{z} - \bar{\xi}} d\theta = 0$$

所以得到 $\int_{|\xi|=R} \frac{\bar{z} f(\xi)}{\bar{\xi} - \bar{z}} d\theta = 0$

对上式取共轭后再与①式相加得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R} \frac{\xi f(\xi) + z\overline{f(\xi)}}{\xi - z} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R} \frac{\xi + z}{\xi - z} u(\xi) d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_{|\xi|=R} v(\xi) d\theta \quad ②$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R} \frac{\xi + z}{\xi - z} u(\xi) d\theta + iImf(0)$$

上面得到的结果也称为 Schwarz 公式，由于

$$\frac{\xi + z}{\xi - z} = \frac{(\xi + z)(\bar{\xi} - \bar{z})}{|\xi - z|^2} = \frac{\xi\bar{\xi} - z\bar{z} - \xi\bar{z} + \bar{\xi} z}{|\xi - z|^2} = \frac{R^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} + \frac{\bar{\xi} z - \xi\bar{z}}{|\xi - z|^2}$$

所以对②式两边取实部得

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R} Re\frac{\xi + z}{\xi - z} u(\xi) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=R} \frac{R^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} u(\xi) d\theta$$

证毕

1、在 Poisson 公式中，若令 $z = re^{i\varphi}$，则由于 $\xi = Re^{i\theta}$，从而

$$|\xi - z|^2 = (\xi - z)(\bar{\xi} - \bar{z}) = (Re^{i\theta} - re^{i\varphi})(Re^{-i\theta} - re^{-i\varphi})$$

$$= |\xi|^2 + |z|^2 - z\bar{\xi} - \xi\bar{z} = R^2 + r^2 - 2Rrcos(\theta - \varphi)$$

所以有

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rrcos(\theta - \varphi) + r^2} u(Re^{i\theta}) d\theta$$

注：在实变函数中常用上面形式的 Poisson 公式。

2、当 $|z| < R$ 换成 $|z - a| < R$ 时，$\xi = a + Re^{i\theta}$，由 Cauchy 公式得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - a|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi - a|=R} \frac{(\xi - a) f(\xi)}{\xi - z} d\theta \quad ③$$

由 Cauchy 定理

$$\int_{|\xi - a|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - a - \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}} d\xi = \int_{|\xi - a|=R} \frac{(\bar{z} - \bar{a}) f(\xi)(\xi - a)}{(\xi - a)(\bar{z} - \bar{a}) - (\xi - a)(\bar{\xi} - \bar{a})} i d\theta$$

$$= i\int_{|\xi - a|=R} \frac{(\bar{z} - \bar{a}) f(\xi)}{\bar{z} - \bar{\xi}} d\theta = 0$$

即有 $\int_{|\xi - a|=R} \frac{(\bar{z} - \bar{a}) f(\xi)}{\bar{\xi} - \bar{z}} d\theta = 0$

对上式取共轭并与③式相加得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi - a|=R} \frac{(\xi - a) f(\xi) + (z - a)\overline{f(\xi)}}{\xi - z} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi - a|=R} \frac{\xi + z - 2a}{\xi - z} u(\xi) d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_{|\xi - a|=R} v(\xi) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi - a|=R} \frac{\xi + z - 2a}{\xi - z} u(\xi) d\theta + iImf(a)$$

上面得到的结果即为这种情况下的 Schwarz 公式，由于

$$\frac{\xi + z - 2a}{\xi - z} = \frac{(\xi + z - 2a)(\bar{\xi} - \bar{z})}{|\xi - z|^2} = \frac{(\xi - a + z - a)(\bar{\xi} - \bar{a} - (\bar{z} - \bar{a}))}{|\xi - z|^2}$$

$$= \frac{|\xi - a|^2 - |z - a|^2 - (\xi - a)(\bar{z} - \bar{a}) + \overline{(\xi - a)(\bar{z} - \bar{a})}}{|\xi - z|^2}$$

所以此时 Poisson 公式为：

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi - a|=R} \frac{R^2 - |z - a|^2}{|\xi - z|^2} u(\xi) d\theta \qquad \xi = a + Re^{i\theta}$$

参考文献：

[1]复变函数教程[M].北京：北京大学出版社.1996

[2]复分析[M].北京：科学出版社.2014

[3]复变函数[M].安徽省合肥市：中国科学技术大学出版社.2001