

幂级数的求和方法总结

◆ 卢 英

(武警警官学院 四川成都 610000)

摘要: 本文运用高等数学知识, 归纳总结了幂级数的几种常见的求和方法, 并以例题说明。

关键词: 幂级数; 求和; 积分; 求导

0 引言

幂级数是高等数学体系的重要组成部分, 它在工程实践中有着广泛的应用。幂级数可以用来表示其他复杂的函数、研究函数的性质、也是进行数值计算的一种工具, 它在自然科学、工程技术和数学本身方面都有广泛的应用。但很多人往往对这一内容感到困难, 产生这一问题的一个重要原因是教材对这一问题讨论较少, 仅有一两个例题使得我们对幂级数求和的诸多问题感到无从下手。本文归纳总结求幂级数和函数的常用方法, 并以例题进行说明。

1 计算部分和的极限

根据无穷级数收敛的定义知, 部分和的极限如果存在, 则该极限就是无穷级数的和。对于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 设其前 n 项和 $S_n(x)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ 。

例1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ 的和函数, 其中 $a \neq 0$, $|x| < 1$

解: 当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} S(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a + ax + \dots + ax^{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - ax^n}{1 - x} = \frac{a}{1 - x} \end{aligned}$$

2 分项组合法

我们通过观察可以发现有些幂级数具有某些明显特征, 比如可以将已知级数的通项拆项组合, 再计算所拆得各项的和函数, 从而求得该级数的和函数。

例2 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+3}$ 的和函数

解: 易知该级数的收敛域为 $(-1, 1)$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+4)x^{n+3} - \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+4})' - 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+3} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+4} \right)' - \frac{2x^4}{1-x} = \left(\frac{x^5}{1-x} \right)' - \frac{2x^4}{1-x} = \frac{3x^4 - 2x^5}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

3 逐项求导与逐项积分法

若幂级数的通项系数是自然数或相邻的自然数相乘的形式, 可以考虑“先积分, 再求导”的做法, 若幂级数的通项系数是自然数的倒数或相邻自然数相乘的倒数, 可以考虑“先求导, 再积分”的做法。

例3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数

解: 易知该级数的收敛域为 $(-1, 1)$

$$\text{设 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

$$\text{则 } S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} = \frac{x^4}{1-x^4}$$

所以

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \frac{x^4}{1-x^4} dx = \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1-x^4} \right) dx \\ &= -x + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2} \right) dx = -x + \frac{1}{2} \arctan x + \\ &\quad \frac{1}{4} \int_0^x \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = -x + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \end{aligned}$$

例2 还可以用逐项积分来计算

解: 易知该级数的收敛域为 $(-1, 1)$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+3} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+2})' \\ &= x^2 \left(\frac{x^3}{1-x} \right)' = x^2 \cdot \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

4 微分方程法

幂级数在收敛区间内其和函数具有任意阶导数, 对于有的幂级数在求其和函数时可以先求出幂级数所满足的微分方程及初始条件, 再通过解微分方程求其和函数。

例4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数

解: 易知该级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$

$$\text{设 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}, \text{ 则 } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$$

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$$

$$\text{以上三项相加得 } S(x) + S'(x) + S''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

这是二阶常系数线性微分方程, 且满足初始条件 $S(0) = 1$, $S'(0) = 0$ 。

$$\text{解此微分方程得 } S(x) = \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{3} e^x$$

通过以上介绍的求和方法及具体例子, 举一反三, 对于这部分内容的学习是有帮助的。

参考文献:

- [1] 杜道渊. 幂级数的求和方法[J]. 价值工程, 2014(4), 202-203
- [2] 同济大学应用数学系. 高等数学(第七版)[M]. 北京: 高等教育出版社. 2014

