用方程思想解决中学数学问题

◆樊燕秋

（苏州工业园区新城花园小学　215000）

摘要：方程思想是数学思想范畴中至关重要的一环.用方程思想解决问题就是通过认清问题中各个量之间的关系，把问题中的已知量和未知量通过代数形成一个等式.方程思想可以把问题的本身进行属性的划分，更直观的面对问题的本质.在教学领域，因为数学各项知识之间紧密的联系，只有把方程思想有很好的掌握才能在数列，图形，函数等问题上有很好的解决.所以，方程思想是解决初中问题至关重要的思想.

关键词：方程思想；函数；数量关系

经过小学数字简单的运算，学生对数学的规则必定也有了解，随之步入初中后，数值之间的计算已经不能满足更高的计算要求，应该学习字母或者式子之间的运算，用字母或者式子代替数值，原来小学数学由静态的计算变成动态的运算.因为这种由浅到深的改变，让学生更加深刻的了解到数学不是简单的计算，只有深入的学习和理解数学才能为之后相关的数形，函数，向量等作出好的铺垫.在经过初中对字母和式子之间的运算后，高中要面对更多的方程，在相应的问题中，应用这种公式处理有差异的问题.在对方程的应用中，如何使用方程，在什么情况下使用方程是重中之重.我们需要有正确的方程思想，那么，何谓方程思想？

方程思想，通俗的说，就是有关方程的思想，我们要清楚什么是方程思想，首先要明白什么是方程.教科书中的定义是：含有未知数的等式叫做方程，也就是说，方程是为了求得未知数建设起的一种等量关系.而方程思想则是对方程的全面升华，方程思想是在遇到问题之后，对问题的本身进行分析，把问题中的各种变量通过一定的式子表达出来的一种思维.在方程思想中，未知量和已知量进行转化，并且寻找他们之间的等量关系，在完成相应方程组的设计之后，对所得方程进行解答.一般的方程思想的掌握一定要具备正确分析问题的能力，懂得根据题中的量之间的关系正确的列出方程.方程思想不单单是一种能力，而是一种更科学的思维方式，一种把抽象的问题转变成直观问题的能力.

一、方程思想的重要性

方程是学生进入初中后所学最基础的数学知识，是由初等数学到高等数学发展的必备技能.因此，掌握好方程思想对学生发展十分重要.对老师来说，如何能更好的引导学生掌握方程思想也是教学中的难点。

在对方程思想的教育中，合理的训练学生的方程思想，可以让学生对方程有更深入的了解，让学生在遇到问题时不会片面的去思考这个问题.这种思想的建立会让学生学会一种自主解决问题的技能，而不是根据问题的本身去解决问题，让学生在解决问题的时候会用多样化的角度去思考.方程思想的掌握不是掌握一项技能，而是掌握了学习技能的才能.在不同问题中引入未知量建立方程求解未知数，可以使学生养成应用方程思想解决问题的习惯，体会到用方程解题的优越性，同时，能量守恒在物理学中的应用，化学平衡式在化学中的应用，也是方程思想的体现.所以，方程思想具有很大的教育意义。

对于方程思想的研究要通过学生对于方程的实际掌握情况，在方程的学习中遇到的问题进行分析，从而得到具有针对性的教学方式.因为在这种思想的教学中，容易出现大量的问题，例如：对方程思想的理解不够充分，在解题过程中混淆相应的数值，对思想学习的重视程度不够等问题.所以设计应分析这些问题，在实际情况下做出相应的改善。

二、方程思想在数学解题中的应用

作为当代数学思想极其重要的一部分，其应用在图形，数值等方面，为这类题目的解决提供了更加方便的解决途径.即使是看起来毫无关联的未知属性，有的也可以在方程的表达中体现出相应的联系.

（1）运用方程思想解代数问题

在代数题的选择中，选取具有代表性的代数题，让代数题的求解可以很直观的体现出思维的迹象。如下题例 1：

例 1 若单项式 $-3a^{3-m}b^2$ 与 $b^{n+1}a^2$ 是同类项，求代数式 $m^2-(-3mn+3n^2)+2n^2$ 的值.

分析这里主要考察初一学生是否已经正确掌握同类项的定义，随后通过定义要求正确列出方程.首先通过方程思想思考，对题目的条件进行分析，题中关键字是同类项，思考同类项的定义，把定义和两个单项式相结合，注意底数和指数，从而得出 $\begin{cases}3-m=2\\ n+1=2\end{cases}$，再通过对所得方程组的求解得到未知数的解 $\begin{cases}m=1\\ n=1\end{cases}$ 再把所得结果带入可以计算出答案。

（2）运用方程思想解函数问题

例 2 求 $y=\dfrac{4x+1}{x^2+x+1}$ 的值域.

分析本体考察学生能否正确联想到用方程解题，并会构造方程，变形得 $yx^2+(y-4)x+(y-1)=0$，此方程有实数解.

当 $y\neq 0$ 时，$\Delta=(y-4)^2-4y(y-1)\geq 0$.求解得

$-\dfrac{2\sqrt{13}+2}{3}\leq y\leq\dfrac{2\sqrt{13}+2}{3}$.

当 $y=0$ 时，$x=-\dfrac{1}{4}$.故 y 的取值为

$-\dfrac{2\sqrt{13}+2}{3}\leq y\leq\dfrac{2\sqrt{13}+2}{3}$.即 $y=\dfrac{4x+1}{x^2+x+1}$ 的值域为

$-\dfrac{2\sqrt{13}+2}{3}\leq y\leq\dfrac{2\sqrt{13}+2}{3}$.

（3）运用方程思想解数列问题

例 3 已知数列 $\{a_n\}$ 的前几项和 S_n 满足 $S_n=2a_n+(-1)^n,(n\notin N^*)$.

1、写出数列的前三项 a_1,a_2,a_3.2、求数列 $\{a_n\}$ 的通项式

分析看到这道题，首先想到的是转化，将 $a_n=pa_{n-1}+S\bullet t^{n-1}$ 通过相应的转变变成 $\dfrac{a_n}{t^n}=p\dfrac{a_{n-1}}{t^n}+\dfrac{s}{t}$，但是这样的计算会让这题的解法异常繁琐，换一种思维，这题的变量是 n，通过 n 的改变，把原来的式子通过简单的计算得到一个一元一次方程，然后再用这样的方法求出答案。

解：因为 $a_1=S_1=2a_1-1$，所以求解得 $a_1=1$.同理得 $a_2=0$.

因为 $S_3=a_1+a_2+a_3=2a_n+(-1)^3$，所以 $a_3=2$.

由题：$S_n=2a_n+(-1)^n$，

所以

$S_{n-1}=2a_{n-1}+(-1)^{n-1}$.

两式相减得

$S_n-S_{n-1}=a_n=2a_n-2a_{n-1}+(-1)^n-(-1)^{n-1}$，

化简得 $a_n=2a_{n-1}-2(-1)^{n-1}$，

所以

$a_{n-1}=2a_{n-2}-2(-1)^{n-1}$.

两式相加得

$(a_n+a_{n-1})=2(a_{n-1}+a_{n-2})$.

所以 $\{a_n+a_{n-1}\}$ 是一个公比为 2 的等比数列.

在等比数列中，$a_2+a_1=1$，$q=2$.

所以

$a_n+a_{n-1}=2^{n-2}$.

联立可得

$\begin{cases}a_n=2a_{n-1}-2(-1)^n\\ a_n+a_{n-1}=2^{n-2}\end{cases}$，

解方程可得

$a_n=\dfrac{2}{3}\left[2^{n-2}-(-1)^n\right]$.