对积分轮换对称性综述

◆杜朝丽

（武警警官学院　四川成都　610213）

摘要：多元函数积分是高等数学中的复杂知识点，本文介绍轮换对称的定义并列举若干例子说明了如何利用轮换对称性简化多元函数微分与重积分的计算。

关键词：多元函数；积分；轮换对称性

对称性不仅是数学美的重要特征，在艺术的各种要素中又是一个非常重要的要素，因而探讨对称性在解题这门艺术中的应用就非常必要。微积分是高等数学中的重点和难点。在某些复杂的微积分计算和证明过程中，特别是涉及三元及三元以上的多元微积分问题，用常规的方法解决十分困难。若能注意并充分利用积分区域的对称性、被积函数的奇偶性以及积分变量的轮换对称性探求多元函数微积分的简化途径，利用其结果计算，可以简化计算过程，提高解题效率。对于有些原本并不具有对称性的问题，我们要善于根据问题的特点构造对称性，从而达到简化问题的目的。

一、预备知识

（一）第一类曲线积分

若平面曲线 $L:u(x,y)=0$，$u(y,x)=0$，则 $\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds$

若空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，$\begin{cases}F(y,x,z)=0\\G(y,x,z)=0\end{cases}$，则 $\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_L f(y,x,z)ds$

同样可以进行多种其它的变换。

（二）第二类曲线积分

第二类三维空间中的曲线积分跟（一）总结想同，但是第二类平面上的曲线积分不同，若若平面曲线 $L:u(x,y)=0$，$u(y,x)=0$，则 $\int_L f(x,y)dx=-\int_L f(y,x)dy$

（三）第一类曲面积分

（1）对于曲面积分，积分曲面 S: $u(x,y,z)=0$，$u(y,z,x)=0$，积分曲面方程没有变，则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_\Sigma f(y,z,x)dS$

（2）对于曲面积分，积分曲面 S: $u(x,y,z)=0$，$u(y,x,z)=0$，积分曲面方程没有变，则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_\Sigma f(y,x,z)dS$

（3）对于曲面积分，积分曲面 $S:u(x,y,z)=0$，$u(z,x,y)=0$，积分曲面方程没有变，则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_\Sigma f(z,x,y)dS$，同样可以进行多种其它的变换。

（四）第二类曲面积分

如果函数 $u(x,y,z)=0$，$u(y,z,x)=0$，那么这个面上的曲面积分 $\iint_\Sigma P(x,y,z)dxdy+Q(x,y,z)dydz+R(x,y,z)dzdx$

$=\iint_\Sigma P(y,z,x)dydz+Q(y,z,x)dzdx+R(y,z,x)dxdy$ 同样可以进行多种其它的变换.

二、典型例题：

例 1.若 $L:x^2+y^2=a^2$，计算 $\int_L x^2ds$

解:对于 L，记 $u(x,y)=x^2+y^2=0$，则 $u(y,x)=y^2+x^2=0$

根据 $\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds$，则 $\int_L x^2ds=\int_L y^2ds$

$$\int_L x^2ds=\frac{1}{2}\oint_L(x^2+y^2)ds=\frac{1}{2}\oint_L a^2ds=\frac{a^2}{2}\oint_L 1ds=\pi a^3$$

例 2. 若 $\Gamma:\begin{cases}x+y+z=1\\x^2+y^2=1\end{cases}$，计算 $\int_L(3x+y+2z)ds$

解：由曲线 Γ 知：x,y 的位置对称，$\int_\Gamma xds=\int_\Gamma yds$

所以 $\int_\Gamma(3x+y+2z)ds=2\int_\Gamma(x+y+z)ds=2\int_\Gamma ds=2a$

例 3. $\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)dS$，其中 $\sum:x^2+y^2+z^2=R^2$

解：由于 $\sum:x^2+y^2+z^2=R^2$ 关于 x,y,z 具有轮换对称性，因而 $\iint_\Sigma x^2dS=\iint_\Sigma y^2dS=\iint_\Sigma z^2dS$

所 $\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)dS=\iint_\Sigma R^2dS=4\pi R^2$

例 4. $\mathrm{I}=\iint_\Sigma xydydz+yzdzdx+zxdxdy$，其中 $\sum:x+y+z=1$ 是第一卦限部分的外侧.

解：由于 $\sum:x+y+z=1$ 关于 x,y,z 具有轮换对称性，因而 $\iint_\Sigma xydydz=\iint_\Sigma yzdzdx=\iint_\Sigma zxdxdy$

所以 $\mathrm{I}=\iint_\Sigma xydydz+yzdzdx+zxdxdy$

$$=3\iint_\Sigma zxdxdy=3\iint_{\substack{x+y<1\\x>0,y>0}}(1-x-y)xdxdy=\frac{1}{8}$$

例 5. $\mathrm{I}=\iint_\Sigma(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$ 其中 $\sum$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$（$0\le z\le h$））的外侧.

解：由于 $\sum$ 关于 x，y 具有轮换对称性，因而

$$\iint_\Sigma(y-z)dydz=\iint_\Sigma(x-z)dzdx=-\iint_\Sigma(x-z)dzdx$$

$$\iint_\Sigma(x-y)dxdy=\iint_\Sigma(y-x)dxdy=-\iint_\Sigma(x-y)dxdy$$

$$\mathrm{I}=\iint_\Sigma(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy=0$$

通过上述例题，可以发现用积分的轮换对称性可以简化积分运算，大大降低了积分的难度，以上方法仅供参考。

参考文献：

[1]同济大学. 高等数学[M]. 高等教育出版社出版. 2016.01.

[2]张天德. 高等数学辅导[M]. 山东科学技术出版社. 2012.07.