

基于 Excel 的第一个重要极限的直观证明

◆白立庆

(焦作卫生医药学校 河南焦作 454001)

摘要: 理论证明第一个重要极限虽然科学严谨, 但需要一些预备知识。本文拟用 Excel 的数据与图像处理功能以列表法和图像法证明该极限, 从另一个角度尝试数学结论的证明。

关键词: Excel; 列表法; 图像法

证明第一个重要极限需要的预备知识: 夹逼定理, 扇形面积公式, 三角形面积公式, 不等式运算规则。如果其中有一部分内容学生不熟悉, 那么就会出现教、学困难。

函数的列表法和图像法可以清楚展示变量之间的对应关系和发展趋势, 在学生理论知识基础薄弱时, 可以用列表法与图像

法证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Excel 是 Office 软件的一个组成部分, 在数据处理, 快捷生成函数图形方面功能强大, 是学生学习计算机基础知识过程中

必学的内容。用 Excel 的数据和图形处理功能证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ 简便直观, 能让学生在自主学习中建构知识意义并获取极其深刻的印象。

1. 用 Excel 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

1.1. x 从右边趋向于 0 ($x \rightarrow 0^+$, 右极限)

选取 x 值

起始值选 0.1, 以递减 0.01 趋向 0。

在 Excel 表中选择单元格 A1, 填写 0.1, 在 B1 中填写 0.09, 然后选中两格, 将鼠标放在右下角, 当光标变成十字时, 按左键向右拖拽, 形成以 0.1 开始差值为 0.01 的递减数列。如图 1 所示。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01

图 1 x 值

(2) 计算 $\frac{\sin(x)}{x}$

在单元格 A2 中输入 “=sin(A1)/A1”, 然后按回车, 出现计算结果, 将鼠标放在单元格右下角黑色方块上, 当指针变成十字时, 按左键向右拖拽, 形成函数值数列, 如图 2 所示。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01
2	0.998334166	0.9986651	0.998933675	0.999184	0.9994	0.999583	0.999733	0.99985	0.999933	0.999983

图 2 $\sin(x)/x$ 值

表中数据展现了当 x 趋向于 0^+ 时, $\sin(x)/x$ 明显趋向于 1 的特点。

(3) 图形显示函数值趋于 1

选中所有数据, 单击插入 “图表” → “XY 散点图”, 得到如图 3 所示的函数图形, 展示了当 x 从右趋近于 0 时, 函数值在接近 1。

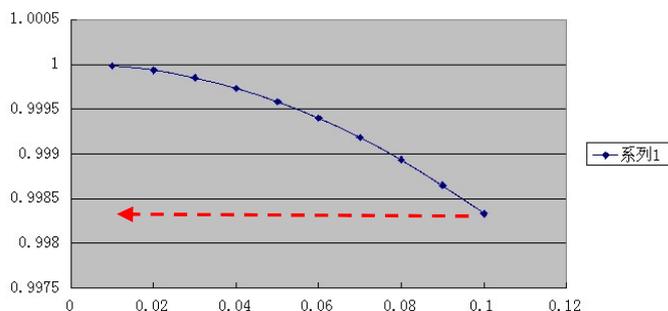


图 3 散点图

1.2 x 从左边趋向于 0 ($x \rightarrow 0^-$, 左极限)

(1) 选取 x 值

起始值选 -0.1, 以递增 0.01 趋向 0;

在 Excel 表中选择单元格 A1, 填写 -0.1, 在 B1 中填写 -0.09, 然后选中两格, 将鼠标放在右下角, 当光标变成十字时, 按左键向右拖拽, 形成以 -0.1 开始差值为 0.01 的递增数列。如图 4 所示。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	-0.1	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	8.32667E-17

图 4 x 值

(2) 计算 $\frac{\sin(x)}{x}$

在单元格 A2 中输入 “=sin(A1)/A1”, 然后按回车, 出现计算结果, 将鼠标放在单元格右下角黑色方块上, 当指针变成十字时, 按左键向右拖拽, 形成函数值数列, 如图 5 所示。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	-0.1	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	8.32667E-17
	0.998334166	0.9986650547	0.998933675	0.999183333	0.999400118	0.999583385	0.999733355	0.999850007	0.999933335	0.999983333	1

图 5 $\sin(x)/x$ 值

表中数据展现了当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $\sin(x)/x$ 明显趋向于 1 的特点。

(3) 图形显示函数值趋于 1

选中所有数据, 单击插入 “图表” → “XY 散点图”, 得到如图 6 所示图形, 展示了当 $x \rightarrow 0^-$ 时, 函数值在接近 1。

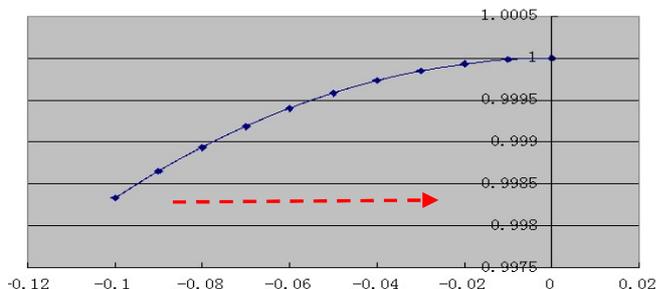


图 6 散点图

1.3 合并数据与图形

将两组数据合并。

在 Excel 表中选择单元格 A1, 填写 -0.1, 在 B1 中填写 -0.09, 然后选中两格, 将鼠标放在右下角, 当光标变成十字时, 按左键向右拖拽, 形成以 -0.1 开始差值为 0.01 的递增数列, 到 0.1 终止。如图 7 所示。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
-0.1	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	8.32667E-17	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1

图7 合并x数据

(2)在单元格 A2 中输入“=sin(A1)/A1”,然后按回车,出现计算结果,将鼠标放在单元格右下角黑色方块上,当指针变成十字时,按左键向右拖拽,形成函数值数列,如图8所示。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	
1	-0.1	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	8.32667E-17	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
2	0.9983	0.9981	0.9980	0.9981	0.9983	0.9985	0.9987	0.9989	0.9991	0.9993	1	0.9995	0.9996	0.9997	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998

图8 合并的sin(x)/x值

(3)选中所有数据,单击插入“图表”→“XY散点图”,得到如图7所示图形,展示了当x从左、右趋近于0时,函数值在趋近于1。

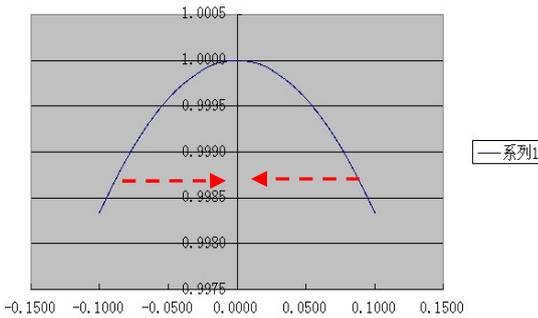


图8 合并图形

2.证明方法的应用:证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(6x)}{3x} = 2$

(1)在Excel表中选择单元格A1,填写-0.1,在B1中填写-0.09,然后选中两格,将鼠标放在右下脚,当光标变成十字时,按左键向右拖拽,形成以-0.1开始差值为0.01的递增数列,到0.1终止。如图9所示。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
-0.1	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	8.32667E-17	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1

图9 x值

(2)在单元格 A2 中输入“=tan(6*A1)/(3*A1)”,然后按回车,出现计算结果,将鼠标放在单元格右下角黑色方块上,当指针变成十字时,按左键向右拖拽,形成函数值数列,如图10所示。

-0.1000	-0.0900	-0.0800	-0.0700	-0.0600	-0.0500	-0.0400	-0.0300	-0.0200	-0.0100	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500	0.0600	0.0700	0.0800	0.0900	0.1000
2.2826	2.2201	2.1682	2.1265	2.0811	2.0622	2.0393	2.0219	2.0097	2.0024	2.0024	2.0097	2.0219	2.0393	2.0622	2.0811	2.1265	2.1682	2.2201	2.2826

图10 tan(6*A1)/(3*A1)

选中所有数据,单击插入“图表”→“XY散点图”,得到如图7所示图形,展示了当x从左、右趋近于0时,函数值在趋近于2。

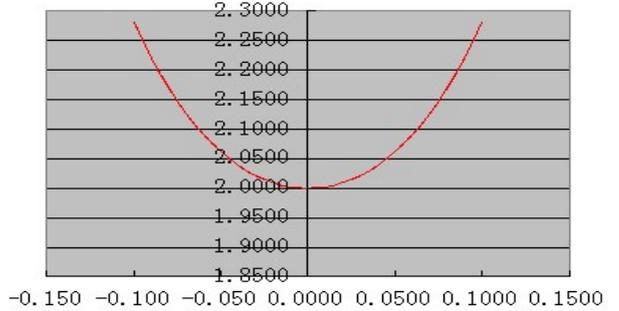


图11 验证tan(6*x)/3x→2

3、分析和结论

3.1 分析

用列表法和图像法能更清楚展示函数极限的特性,Excel在数据和图形处理方面的强大功能使这两种方法可以很容易被教师和学生所接受和应用;在教师讲解常规的证明方法或求解方法之后,学生可依此来快速验证类似结论。

这种证明方法能否取代理论的证明方法在非理工类的数学教学中应用是值得探讨的一个问题。如果能取代或作为辅助的学习方法,那么这种数学证明将变得直观、有趣,学生通过自主学习建构的知识意义更加稳固。

3.2 结论

在计算机普及的今天,有些问题让学生用计算机去验证或许比原来的处理方法更有优势,类似的方法需要进一步系统化。

参考文献:

[1]薛志纯. 高等数学[M]. 1. 清华大学学研大厦A座:清华大学出版社,2008:37-39.
[2]神龙工作室.excel数据透视表与数据分析范例应用[M]. 1. 人民邮电出版社,2010:233-237