解析几何背景下的数形结合思想的应用研究

◆翟红利

（上海市张堰中学　上海　201514）

摘要：在解决解析几何问题是很遇到很复杂的计算问题，这是就需要借助数形结合来解决问题。解析几何将形转化为了数，完成了形到数的转化，这就是数形结合思想的一个非常重要的体现，另一个就是我们也需要完成数到形的转化。我国著名数学家华罗庚曾说过："数缺形时少直观，形少数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休"。数学中，数和形是两个最主要的研究对象，它们之间有着十分密切的联系，在一定条件下，数和形之间可以相互转化，相互渗透。

关键词：解析几何；数形结合；以形助数；以数辅形

在多年的教学经历中，我发现了这样了一个现象：中等难度的题目，学生是能够写出一些必要的过程的，但是往往因为题目的繁杂程度以及计算问题而中途放弃。这类学生已经掌握了一些数学解题的方法，但是对于数学思想的掌握还不到位，在没有正确数学思想应用的前提下，解题就变得索然无味，从而使学生丧失了解题的乐趣，阻断了学生继续研究的动力。因为解析几何是用代数方法去解决几何问题，很多学生认为解析几何就是算，所以上述现象更加严重，为了解决这一现象，我们就来研究一下解析几何中非常常用的一个数学思想：数形结合。

在解析几何创立以前，几何与代数是彼此独立的两个分支。解析几何的建立第一次真正实现了几何方法与代数方法的结合，使形与数统一起来，这是数学发展史上的一次重大突破。解析几何的基本思想是用代数的方法 来研究几何问题，基本方法是坐标法。就是通过坐标把几何问题表示成代数形式，然后通过代数方程来表示和研究曲线。高中阶段主要研究的是平面解析几何。除研究直线的有关性质外，主要研究圆锥曲线（圆、椭圆、抛物线、双曲线）的有关性质。解析几何将形转化为了数，完成了形到数的转化，这就是数形结合思想的一个非常重要的体现，另一个就是我们也需要完成数到形的转化。我国著名数学家华罗庚曾说过："数缺形时少直观，形少数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休"。数学中，数和形是两个最主要的研究对象，它们之间有着十分密切的联系，在一定条件下，数和形之间可以相互转化，相互渗透。

数形结合的思想有两方面，一方面是"以数助形"即在解决问题时通过图形的直观帮助解题；另一方面是"以形解数"即在解决问题时通过数的计算解决几何问题，体现了数与形巧妙结合。研究数学的给出条件与所要解答问题的关系，分析其中的代数意义和几何的直观，使数与形有机的结合，是数形结合思想的本质。数形结合思想汲取了代数和几何方法的优点，在学习中经常会应用，在解析几何中的很多题目中都得到了体现。 运用数形结合思想首先在解析几何部分要掌握一些曲线的代数特征，在分析具体数学问题时，要分析其中所包含的代数问题和几何问题两个方面，然后设出合理的参数，建立相应的关系，做好数量与图形之间的转换，最后根据题目要求确定所设的参数。解析几何解题过程中恰当使用数形结合的思想通常会达到事半功倍的功效。

一、模型的类型

解析几何是形到数的转化，我们先来总结一下解析几何中常用的数学模型，将数和形很好的对应起来：

点到点的距离模型：$(x-a)^2+(y-b)^2$；

点到线的距离模型：$\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$；

截距模型：$ax+by$；

斜率模型：$\dfrac{y-b}{x-a}$；

圆的模型：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$；

椭圆模型：$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=2a,2a>|F_1F_2|$；

双曲线模型：$\left|\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}-\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\right|=2a,2a<|F_1F_2|$；

抛物线模型：$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，点$(a,b)$不在$Ax+By+C=0$上。

把"数"对应的"形"找出来，就能把难题化抽象为具体并能揭示隐含的数量关系。一般方法是看形思图、见数想形。

二、以形助数--借助图形的直观理解数量关系

（一）距离型

华罗庚说过："数无形时少直觉，形少数时难入微，数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞。"数学的数与形是不分家的。已知点 P 为曲线$(x-2)^2+y^2=4$上任意一点，求：$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$的最大值和最小值。首先我们根据条件点 P 为曲线$(x-2)^2+y^2=4$上任意一点，容易看出此曲线为以$(2,0)$，$r=2$为半径的圆。而$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$表示点$(3,3)$到点(x,y)的距离，所以需要借助"形"根据图像可知设点$(3,3)$到点的距离为d,则 最大值为$d+r$，最小值为$d-r$。

根据数的结构特征，构造出与之相适应的几何图形，并利用图形的特性和规律，揭示其几何意义，使数量关系和空间形式巧妙、和谐地结合起来，并充分利用这种结合,寻找解题思路,使问题得到解决。比如方程$\sqrt{2(x-1)^2+2(y-1)^2}=|x+y+2|$表示的曲线是_____

分析：直接化简较繁！如能联想到点到直线的距离公式，数形结合，以形助数，则简洁明了。

原方程可化为：$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\dfrac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$即动点$P(x,y)$到定点$(1,1)$的距离与到定直线$x+y+2=0$的距离相等$\therefore$方程$\sqrt{2(x-1)^2+2(y-1)^2}=|x+y+2|$表示的曲线是抛物线。

（二）斜率型

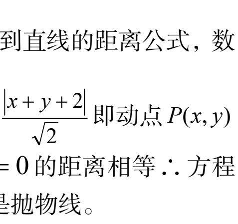
毕达哥拉斯说过"在数学的天地里，重要的不是我们知道什么，而是我们怎么知道什么。"有些时候通过题意直接分析题求解时很不直观，不能直接找到突破口；或者求解时计算量很大、很费时间；或者有时根本就无法求解。这个时候就要求我们学会分析转化题意的能力了，因此恰当的运用数形结合思想就显得很有必要了，灵活的运用属性思想不仅可以化解题目难度，还可以做到快、准等意想不到的收获。

比如，已知点P 为曲线$(x-2)^2+y^2=4$上任意一点，求：$\dfrac{y}{x+2}$的最大值和最小值.

分析：$\dfrac{y}{x+2}$看成点$(-2,0)$与点(x,y)连线的斜率，有图像可知直线与圆相切是分别取到最大值和最小值。范围为$[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$。

（三）Ax + By 截距型

许多题目通常起点都比较大，给人一种难度较大，比较繁琐的感觉，若我们只是从题干一味琢磨，想直接从已知条件推出结果，往往等待我们的就是死胡同。但我们若是能够依据题意，用图形等其他方式把题意表达出来，然后再通过观察图形来找出问题的突破口，有时会找到意想不到的收获，甚至有时会享有一种顿悟后求解的喜悦感。



已知$x,y\in R$且$x^2+y^2=3(y\ge 0),b=2x+y$，求b的取值范围。

分析：此题直接求解较难，数形结合联想直线的截距。结合直线与圆的位置关系即可求。b 可看作斜率为 -2，过半圆 $x^2+y^2=3(y\geq 0)$ 上点 $P(x,y)$ 的直线在 y 轴上的截距，由图可知：$n_2\leq b\leq n_1$

$P_2C: y=-2(x+\sqrt{3})$ 令 $x=0\Rightarrow n_2=-2\sqrt{3}$

$P_1B: 2x+y+c=0$，则圆心到 PB 的距离 $d=\frac{|c|}{\sqrt{5}}=\sqrt{3}\Rightarrow c=\pm\sqrt{15}$

即 $n_1=\sqrt{15}$ $\therefore -2\sqrt{3}\leq b\leq\sqrt{15}$

比如若直线 $y=x+k$ 与曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$ 恰有一个公共点，求 k 的取值范围.

解：曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$ 是单位圆 $x^2+y^2=1$ 的右半圆（$x\geq 0$），k 是直线 $y=x+k$ 在 y 轴上的截距．由数形结合知 k 的范围为 $(-1,1]\cup\left\{-\sqrt{2}\right\}$

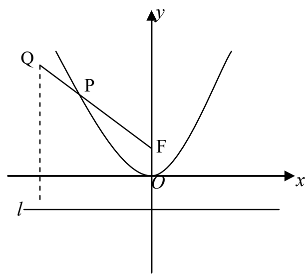
（四）圆锥曲线型

已知点 P 在抛物线 $x^2=4y$ 上，那么点 P 到点 $Q(-3,2)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和取得最小值时，点 P 的坐标为（　　）

A. $(-4,4)$　　B. $\left(1,\frac{1}{4}\right)$　　C. $(2\sqrt{2},2)$　　D. $(-2,1)$

分析：点 P 到点 $Q(-3,2)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和取得最小值时，点 P 到点 $Q(-3,2)$ 的距离与点 P 到抛物线的准线的距离之和也取得最小值,这样就可以把点 P 到抛物线的准线的距离转为到焦点的距离求出．点 $Q(-3,2)$ 在抛物线 $x^2=4y$ 的外部,要使点 P 到点 $Q(-5,\frac{19}{4})$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和取得最小值,根据抛物线的定义知,须使点 P 到点 $Q(-5,\frac{19}{4})$ 的距离与点 P 到抛物线焦点距离之和取得最小,即 P,Q,F 三点共线时最小．由斜率公式得 $k_{QF}=-\frac{3}{4}$,所以 QF 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x+1$,

解方程组 $\begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+1 \\ x^2=4y \end{cases}$ 得,点 $P(-4,4)$,故选 A.



四、渗透数形结合思想的教学反思

实施数形结合思想教学以来，让我深深体会到：强化数学思想方法的教学是提高学生学习成绩的有效途径。解题时利用数形结合，思想不仅形象易懂，而且可以帮助学生克服思维定势，学生还可以进行大胆合理的想象，不拘泥于教师的解题模式。使之前计算繁琐的题目变得简单，极大的提高了学生学习数学的兴趣。因此,我们应该抓住数形结合的解题契机：(1)在审题时与解题前,运用数形结合的思想方法勾画题目大意,完善认知结构,确定解题思路,做到胸有成竹,从而有条不紊地解题。(2)在解题过程中,通过适当转换变形后,运用数形结的思想方法调整解题背景。利用数形结合思想能优化解题思路，把问题化难为易、化繁为简，体现数学和谐统一之美。代数中的“杨辉三角”和几何中的“黄金分割”都是数学中的和谐统一美的典例。和谐统一的数形结合可以使解析几何复杂问题简单话，抽象问题具体化，让学生重拾对解析几何的信心。而且数与形的巧妙结合能使学生从逻辑推理中领略到数形和谐统一美的神韵。

参考文献：

[1]徐先荣.谈初中数学数形结合的教学策略[J].大教论坛.2007.4:75.
[2]周房安.巧用数形结合法解题[J].高中. 2006, 6:21-22.
[3]朱殿利.数形结合法在高等数学中的应用再探析[J].岱宗学刊.1998, 4:23-25.
[4]徐文龙."数形结合"的认知心理[D]. 广西:广西师范大学,2005.
[5]刘加霞."数形结合"思想及其在教学中的渗透[J].小学教学数学版.2008,5:44-46.
[6]顾亚萍.数形结合思想方法之教学研究[D]. 南京:南京师范大学,2004.