对微积分中无穷小量的一点探讨

◆李玉荣

（武警警官学院 基础部　四川成都　610213）

摘要：通过无穷小量的发展历史可以看到无穷小量在微积分中占有十分重要的地位，而对于无穷小量可以比较它们收敛于零的速度快慢，尤其是等价无穷小量在求极限的过程中发挥着重要作用。

关键词：无穷小；微积分；极限

1、无穷小的发展历史

人们对无穷小的认识经历了一个漫长的过程，直到十八世纪，仍然没有较完善的解释无穷小概念。由于微积分的诞生不是严格按照“逻辑线路”生成的，包括牛顿和莱布尼茨本人都对微积分的那个“微小量”的处理是否合法产生过怀疑，许多人也发现了那个“微小量”在逻辑中产生的悖论，以至于被嘲讽为“无穷小精灵”。无穷小是什么，无穷小究竟能不能是零，我们怎样确切地描述它，这些问题引起了数学界乃至哲学界长达一个半世纪的争论，并引发了第二次数学危机。

比较著名的芝诺悖论可以看作是此次危机的萌芽：跑得很快的阿希里赶不上在他前面的乌龟。直到 19 世纪 20 年代，一些数学家才比较关注于微积分的严格基础。从波尔查诺、阿贝尔、柯西、狄里赫利等人的工作开始，到威尔斯特拉斯、狄德金和康托的工作结束，中间经历了半个多世纪，基本上解决了矛盾，为数学分析奠定了一个严格的基础。

2、无穷小的重要性

无穷小量在微积分中占有十分重要的地位，如果将微积分比喻为一座大厦，那无穷小就存在于每一块砖石之中，无法将其分离。正确理解无穷小量的概念有助于理解微积分的本质。从微积分的产生到无穷小概念的建立，这个历史过程生动地表明：一种新的数学方法，不能长期停留在形象直观的阶段上，必须在不断深化认识的基础上，由定性认识转化为定量认识，形成概念和理论的系统，否则，就不可能做出科学的抽象，也不可能适应社会经济以及数学自身发展的需要。

3、无穷小的比较

对于一对函数而言，它们在某一点的极限可能都是无穷小，但是趋近于零的速度却有快有慢，有的快一些有的慢一些，那么，我们要怎样比较这种快慢呢？

我们知道，谁趋近于零，谁的绝对值就越小。所以比较 α、β 趋近于零的快慢就可以用除法。只要两个数一相除，那么它们的相对大小就比较出来了，由于它们是动态的函数，只要时时刻刻满足这个规律，这个关系就不会变。另外由于这两个函数是同一极限过程中的无穷小，那么由相对大小就可以比较出谁更快的接近于 0 了。

例如：$x \to 0$时，x，x^2，$\sin x$ 都是无穷小，但是由于

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=$　　x^2 比 3x 要快得多

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　$\sin x$ 与 x 大致相同

4、等价无穷小量

无穷小量是指某变化过程中极限为 0 的变量。而等价无穷小量是指在某变化过程中比值极限为 1 的两个无穷小量。等价无穷小量在求极限问题中非常重要。恰当的使用等价无穷小量代换常常使极限问题大大简化，但是有时却不能使用等价无穷小量代换。

例如在有加减的情况下不能随便运用等价无穷小代换求极限，问题在于两个无穷小相加减可能因为低阶部分相消而变成更高阶的无穷小量。

例如：$x \to 0$时，$\sin x \sim x$　　$\tan x \sim x$

但是由于　$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^3)$　　$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + O(x^3)$

所以 $\tan x - \sin x = \frac{1}{2}x^3 + O(x^3)$

即 $x \to 0$时，$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$

参考文献：

[1]同济大学数学系编.高等数学第七版.高等教育出版社.2014 年 7 月

[2]华东师范大学数学系编. 数学分析第四版. 高等教育出版社. 2010 年 7 月