

高中数学课程内容研究

——高考题中对数列知识点的分析研究

◆王玲

(重庆师范大学 重庆 401331)

摘要: 数列是高中学习的重要内容。通过对近几年数学高考题的分析类比,我们研究了有关数列的高频考点,如数列的定义,通项公式,求和公式,以及项与和之间的递推关系等。同时为了学生能在高考中取得满意的成绩,我们提出了相关的复习建议。

关键词: 数列; 高考; 方法; 建议

一、前言

所谓数列就是指一系列数按照一定的次序排列。同时数列在我们的日常生活中随处可见。例如在个人投资理财,房屋贷款等方面我们都可以发现数列的踪影。通过对近几年数学高考题的分析与类比,我们发现在高考中,数列命题主要有如下特点:第一,数列问题往往以实际生活为背景,注意考查学生对“双基”的把握;第二,为了选拔人才,某些数列问题灵活多变,不仅注重对学生知识掌握程度的考查,更加注重对学生能力的考查;第三,综合题则以数列为为主线,与其他知识点如方程,极限等相联系,这需要学生将相关知识点联系起来,并形成较完整的知识体系,才能使问题得解。

本文也将围绕以下的观点进行简要的分析:

(一)阐述数列的定义,例如等比数列和等差数列这两种常见的数列;(二)总结近几年的数列高考考点,并对解题的思想方法进行归纳总结;(三)对学生学习数列给与适当的建议,让学生能够高效学习,从而在高考中强占先机。

二、数列基本知识

(一)数列及通项

1 数列:按照一定次序排列的一列数称为数列,数列中每一个数称为该数列的项。

2 通项公式:如果数列的 n 项和与序号之间的关系可以用一个式子来表示,那么这个公式叫做这个数列的通项公式。

(二)等差数列及等比数列

1 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n - a_{n-1} = d$ (其中 d 是常数),这个数列叫做等差数列。其中 a_1 为数列的首项, d 为等差数列的公差。则等差数列的通项公式为:

$$a_n = a_1 + (n-1)d (n \in \mathbb{N}^*)$$

2 数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (其中 q 是常数),这个数列叫做等比数列。其中 a_1 为数列的首项, q 为等比数列的公比。则等比数列的通项公式为:

$$a_n = a_1 q^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$$

三、高考中有关数列的考点分析及解题方式

(一)数列的基本概念

在近几年的数学高考中,数列的定义及性质大多在选择和填空这两类题型中进行考查。在高考试题中,对数列的定义及性质的考查形式灵活多样。这要求学生基础知识牢固掌握。

1 数列的定义

例题1(2016上海卷)无穷数列 $\{a_n\}$ 由 k 个不同的数组成, s_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若对任意 $n \in \mathbb{N}^*, s_n \in \{2, 3\}$,则 k 的最大值为

解:由题意, $s_n \in \{2, 3\}$, 则 $a_1 = s_1 \in \{2, 3\}$ 。

将可能的数列写出,并将其中有相同项的情况舍去,可得:

- (1) $a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = -1$;
- (2) $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = -1$;
- (3) $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 0$;

$$(4) a_1 = 3, a_2 = 0, a_3 = -1, a_4 = 1;$$

$$(5) a_1 = 3, a_2 = -1, a_3 = 0, a_4 = 1;$$

$$(6) a_1 = 3, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = 0。$$

可写到第4项,即 $k_{\max} = 4$, 则答案为4。

2 数列的性质

例题2(2015全国卷) 设 s_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,

若 $a_1 + a_3 + a_5 = 3$, 则 $s_5 =$ ()

A, 5 B, 7 C, 9 D, 11

解: $a_1 + a_3 + a_5 = 3a_3 = 3$, $a_3 = 1$, $s_5 = 5a_3 = 5$, 所以故选 A

(二)数列的通项公式

通过对近几年数学高考题的分析研究,我们发现有关数列的通项公式也是数学高考题的高频考点之一。包括以下几方面的考察:

①有关等差数列及等比数列的通项公式的求解;

②给出数列(如等比数列和等差数列)的递推公式,求通项公式。

例题3(2018全国卷) 已知数列 $\{a_n\}$ 是满足 $a_1 = 1, na_{n+1} = 2(n+1)a_n$ 。

$b_n = \frac{a_n}{n}$, 判断数列 $\{b_n\}$ 的通项公式是否为等比数列,并说明理由。

解: $\{b_n\}$ 是首项为1, 公差为2的等比数列,由条件得:

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n}$$

所以 $b_{n+1} = 2b_n$, 又因为 $b_1 = 1$

则 $\{b_n\}$ 是首项为1, 公差为2的等比数列。

(三)数列的求和

解高考中的数列求和问题,常用的方法有定义法,裂项求和法,错位相减法等。这些基本方法是要求学生必须熟练掌握,并通过充分的练习,能在面对类似的考题快速反应,准确完成。

1 定义法

例题4(2015全国卷) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $\{s_n\}$, 满足 $s_n = a_n - a_1$,

且 $a_1, a_2 + 1, a_3$ 成等差数列。

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

求数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n

解: (1) 略

(2) 解(1)可得 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^n}$, 所以:

$$T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = 1 - \frac{1}{2^n}$$

2 错位相减

例题5() 0 已知数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 2, b_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n (n \in \mathbb{N}^*)$,

$$b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \cdots + \frac{1}{n}b_n = b_{n+1} - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$$

(1) 求 a_n 与 b_n ;

(2) 记数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n 。

解:(1)由题意知: $a_1=2, a_{n+1}=2a_n (n \in N^*)$, 可得 a_n 是公比为2, 首项为2的等比数列, 得 $a_n=2^n (n \in N^*)$

当 $n=1$ 时, $b_1=b_2-1$, 故 $b_2=2$ 。

当 $n=2$ 时, $\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-b_n$, 整理得 $\frac{b_{n+1}}{n+1}=\frac{b_n}{n}$, 所以 $b_n=n (n \in N^*)$ 。

(2)由(1)知 $a_nb_n=n \cdot 2^n$,

因此 $T_n=2+2 \cdot 2^2+3 \cdot 2^3+\cdots+n \cdot 2^n$,

$2T_n=4+2 \cdot 2^3+3 \cdot 2^4+\cdots+n \cdot 2^{n+1}$,

所以 $T_n=2+(n+1) \cdot 2n+1 (n \in N^*)$

3 裂项法

例6 (2017 新课标) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$

(1) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和。

解:(1)略

(2)由(1)得 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{2}{2n-1}$, 设 $b_n=\frac{a_n}{2n+1}$, 则:

$$b_n=\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$

$$s_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\text{故其前 } n \text{ 项和为: } =1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$$

四、复习建议

数列不仅是高中学习的重要内容, 而且更为学生今后在高校中进修高等数学打下了牢固的基础, 因此数列一直是高考的大热门。结合近几年对高考的分析, 可以从以下几个方面展开对数列的复习:(一)重视数列的基础知识。等比数列和等差数列是学生学习的两个基本数列, 二者是一切数列问题的起点以及归宿,

其中蕴含着许许多多思想方法。学生在复习时要注重其产生的过程。了解数列的性质就可以更快, 更准确地求解。例如求一列数的中间项, 就可以利用中项公式来快速求解。(二)数列求和是学生学习数列的一大难点。学生在复习时既要掌握定义法, 也要掌握错位相减法, 倒叙相加等间接求和的方法, 若两者皆无法求得问题的解时, 就不得不考虑数学归纳证明法。(三)在高考题中, 对数列的考查既有单独考查, 但为了加大考查的难度往往与其他知识点联合考查, 这就需要学生牢记相关知识点, 并形成知识网络, 加以熟练地综合应用。

在数学高考复习中, 我们既要掌握有关数列的基本知识点, 如数列的定义及性质, 也要掌握有关的解题方法, 如数列求和涉及到错位相减, 裂项求和等方法。但是要在高考中取得高分, 需要学生在较短的时间内进行高效的复习。这就要求我们要根据课标及考试大纲进行详细地分析, 以找出有关数列的高频考点, 进行有计划的复习, 以在较短的时间内进行高效复习。只要我们不气馁, 在数学学习的道路一直坚持下去, 就一定会取得高分, 考入自己向往的大学。

参考文献:

- [1]教育部考试中心.高考理科试题分析(2015版)[M].北京:高等教育出版社, 2015:153-155.
- [2]刘秀湘.2017 高等数学全国卷 I 试题和答案分析[J].中学教学研究(上半月), 2017(9):9-13.
- [3]叶景辉.高考数列题的解题策略研究与试题评析[D].广东:广州大学, 2016.
- [4]吴平生.面向 2016 年全国高考的概率统计复习备考研究[J].中学教学研究(上半月), 2015(9):15-20.
- [5]陆慧.江苏高考数列题的研究[D].江苏:苏州大学, 2016.

作者简介:王玲(1995.1-), 女, 四川省南充人, 重庆市沙坪坝区重庆师范大学, 学科教育(数学), 研究生。