

转化思想在中学数学中的应用

◆周彦利

(重庆师范大学 重庆 400030)

摘要: 数学是一门逻辑性极强的学科,对于数学的学习不仅要掌握基础知识,还要学习数学思想方法。本文将从转化思想的概念、作用以及分类等方面介绍转化思想,然后再从中学数学中转化思想的具体应用进行阐述,列举数例使其更有说服力。

关键词: 数学思想方法;转化思想;中学代数;中学几何

教师在引导学生获取数学知识的同时,还应当有意识地使他们受到数学思想方法的熏陶。数学思想方法是数学的核心,而转化思想又是数学思想方法的精髓,因此感受并学会转化思想对于教师和学生来说都是有必要的。所以教师在教学过程中一定要重视转化思想的渗透与培养,这将有助于学生将数学知识转化为数学能力,从而提高学生的数学素质。

一、转化思想的含义

1.1 转化思想的概念

转化思想又称化归思想,是解决数学问题的一般思想方法,具体指的是:人们在解决数学问题时,常常将待解决的问题,通过某种转化手段,转化为另一个问题,而得出新问题是相对容易解决或已有固定解答的问题,且通过对新问题的研究解决可以得出原问题的解答^[1]。

1.2 转化思想的作用以及意义

在中学数学解题过程中,往往需要用到转化,而且转化的思想往往体现在不经意的应用中。换句话说,转化思想无处不在。转化思想不仅仅是一种思维方式,更是一种解题技巧。熟练运用转化思想可以在解题时起到事半功倍的效果,并且有助于数学思维的形成和解题能力的提高。

就解题的本质而言,解题就意味着转化,即把复杂的问题转化为简单问题、部分转化为整体、生疏问题转化为熟悉问题、把实际问题转化为数学模型、把高次问题转化为低次问题、一般问题转化为特殊问题、体验教学转化方法、数与形的转化等等。因此学会数学转化,将有利于实现学习迁移,从而较快地提高学习质量和数学能力。

二、转化思想在中学数学中的应用

1、在函数中的应用

函数是特殊的映射,而映射就是由一个集合到另一个集合的一种转化,所以函数本身就是转化思想的体现,有关于函数的解题过程更是少不了转化思想的参与。

例1. 求函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ 的最小值。

解: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

$$= \sqrt{(x-1)^2 + (0-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (0-1)^2}$$

将原问题转化为求 x 轴上一动点 $(x, 0)$ 到两个定点 $(1, 1)$ 和 $(2, 1)$ 的距离之和的最小值。易知当 $x = \frac{3}{2}$ 时取得最小值 $\sqrt{5}$, 即 $f_{\min}(x) = \sqrt{5}$ 。

2、在方程和不等式中的应用

每个方程、不等式的解题过程中都渗透了转化思想,最为典型的就是将方程与不等式中的未知数向已知数转化。同时在解方程的过程中应用转化思想也是很常见的,例如:将无理式方程转化为有理式方程;将分式方程转化为整式方程;将分式不等式转化为整式不等式等等。

例2 解分式方程: $\frac{2}{x-3} = \frac{3}{x}$

解: 方程两边同时乘以 $x(x-3)$, 得 $2x = 3(x-3)$

解这个方程, 得 $x = 9$

检验, 将 $x = 9$ 代入原方程, 得左边 $= \frac{1}{3}$ = 右边

所以, $x = 9$ 是原方程的根。

分析: 在解分式方程时都应该转化为整式方程再进行求解。值得注意的是, 在转化的过程中要考虑分式的分母的取值情况。

3、在概率中的应用

在数学解题过程中有一个叫做正难则反的原则, 就其实际意义来说, 就是当从问题的正面去思考问题, 遇到阻力难于下手时, 可通过逆向思维, 从问题的反面出发, 运用某些知识逆向地去解决问题。

在概率的问题中, 若事件 A, B 互为对立事件, 则有 $P(A) = 1 - P(B)$ 。因此, 若题中涉及到有多种情况的概率问题时, 大可将问题转化为求较为简单的对立面, 可以比较快速的计算出结果。

例3 甲、乙、丙三个人参加一次射击比赛, 三个人每一次击中目标的概率都是 0.6。若每人射击一次, 则三人中至少有一个人击中目标的概率为多少。

解: 设事件 $A =$ “三人中至少有一个人击中目标”, 则有 $\bar{A} =$ “三人中没人击中目标”。

因为 $P(\bar{A}) = (1 - 0.6)^3 = \frac{8}{125}$, 所以 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{8}{125} = \frac{117}{125}$ 。

分析: 此题若从正面求解则需讨论三种情况, 一种情况是一个人击中两个人未击中, 其中又包含有三种情况; 第二种情况是两个人击中一个人未击中, 其中也有三种情况; 第三种情况是三人都击中, 只有一种情况。即如果正面解答这道题则总共需写明 7 种事件, 比较麻烦, 并且很容易就会出现遗漏。但是如果我们从反面情况入手, 其对立事件是三个人都没击中目标, 那么就只有一种情况。从这道题中就可以很清楚的看出转化思想在解决这一类问题中的优势。

4、在平面几何中的应用

转化思想同时也活跃在平面几何当中。但是在解题时对于每一道题的转化方向、转化方法不一定是一样的, 这就需要我们根据每一道题的具体情况来决定转化方向、方法, 使问题简单化。

例4 已知 $\triangle ABC$ 的三条中线, 求做这个三角形。

解: 设 m, n, p 分别为 BC, AC, AB 边上中线的长。

取 $GL = \frac{2}{3}m$, $BL = \frac{2}{3}n$, $BG = \frac{2}{3}p$

现以 GL, BL, BG 为三边做 $\triangle GBL$, 如图二所示。

延长 GL 至 A 点, 使 $AL = GL$; 设 GL 中点为 D 点, 延长 BD 至 C 点, 使 $CD = BD$, 连接 AC, AB , 那么 $\triangle ABC$ 即为所求三角形。

分析: 在经过简单的转化之后, 原来的问题就转化成了已知三边求做三角形 ($\triangle GBL$) 的问题。而这就比较简单了。

5、在线性规划问题中的应用

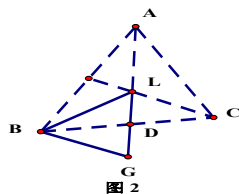
数学模型是从现实世界中抽象出来的, 是对实际问题的深刻、全面和真实反映, 通过构造数学模型, 把实际问题转化为数学问题, 使问题的得以解决^[2]。运用转化思想, 我们可以将生产实际中的遇到的许多问题转化为线性规划问题进行求解。

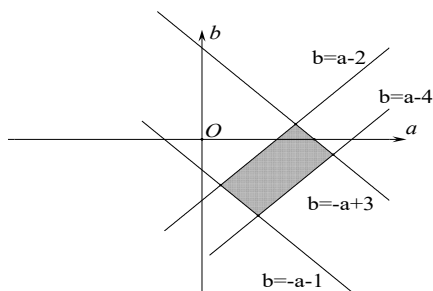
例5. 已知 $-1 < a+b < 3, 2 < a-b < 4$, 求 $2a+3b$ 的取值范围。

解法一: $\because 2a+3b = \frac{5}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)$

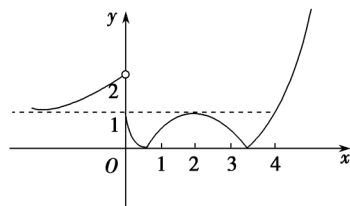
$$\therefore 2a+3b \in \left(-\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$$

解法二: 将问题转化为线性规划问题, 题干所给条件可以视为对于 a, b 的线性约束条件, 做出可行域如图所示, 易求得目标函数 $z = 2a+3b$ 的取值范围为 $\left(-\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$





条件即为它的可行域,计算出目标函数 $z = 3a + b$ 的取值范围为 $(3, 11)$



总结: 线性规划本身就是转化思想的一种应用,可以利用数形结合将实际问题方程化,更易求解。

三、结束语

转化思想在中学数学中有着广泛的应用,除了以上几个方面的转化,还有高次向多次的转化,无限向有限的转化等。各种转化的共同本质是变中有不变。转化是手段,揭示其中不变的东西才是目的,为了不变的目的去探索,转化的手段就构成了解题思路。

参考文献:

- [1] 杨毅. “转化思想”在初中数学中的应用[J]. 现代教育数学探索学术交流会, 2015, 5(2): 71-73
- [2] 张奠宙, 宋乃庆. 数学教育学概论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004

作者简介: 周彦利(1995.02—), 女, 四川邻水人, 重庆市沙坪坝区重庆师范大学, 学科教学(数学), 专业: 硕士研究生。

例 6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 方程

$[f(x)]^2 - af(x) + b = 0 (b \neq 0)$ 有 6 个不同的实数解, 求 $3a + b$ 的取值范围。

解: 首先作出函数 $f(x)$ 的图象, 对于方程 $[f(x)]^2 - af(x) + b = 0 (b \neq 0)$, 可令 $f(x) = t$, 那么方程根的个数就是 $f(x) = t_1$ 与 $f(x) = t_2$ 的根的个数之和, 结合图象可知, 要使总共有 6 个根, 需要一个方程有 4 个根, 另一个方程有 2 个根, 从而可知关于 t 的方程 $t^2 - at + b = 0$ 有 2 个根, 分别位于区间

$(0, 1)$ 与 $(1, 2)$ 内, 进一步由根的分布得出限制条件 $\begin{cases} b > 0 \\ 1 - a + b < 0 \\ 4 - 2a + b > 0 \end{cases}$.

要求 $3a + b$ 的取值范围, 可将其转化为线性规划问题, 限制