

浅谈复变函数的特有性质

◆王国欣 牛玉俊

(南阳理工学院数学与统计学院 河南南阳 473004)

摘要: 复变函数是实变函数的推广,在教学中可以运用类比和对比的方法来提教学效率和学生的学习效率,同时要格外关注复变函数的特有性质,以加深学生对知识的理解,进而提升到应用的高度,培养学生理论联系实际及解决实际问题的能力。

关键词: 复变函数;实变函数;特有性质

复变函数论是数学专业学生需要学习的一门重要的基础课程,它的研究对象是以复数为自变量的函数。复变函数论产生于两百多年前,在十九世纪时其理论知识得到了全面的发展,并在二十世纪初得到了进一步的完善。复变函数不管是在数学理论方面还是在实际应用方面,都有着很广泛的应用。在数学方面,复变函数已经深入到概率统计、微分方程、计算数学、拓扑学等学科。在实际应用方面,可以利用复变函数来处理物理学中的稳定平面场问题;在飞机设计过程中,茹柯夫斯基在处理飞机机翼的结构问题时也利用了复变函数论,并利用了复变函数知识解决了航空力学方面和流体力学方面的问题。

复变函数的学习是建立在数学分析或高等数学学习的基础上的,很多概念和结论在描述形式上非常相似,但二者之间的本质意义却不同。学生在学习这门课程时易与数学分析或高等数学中的相关内容混淆,思维定势难以扭转,以至于难以理解甚至是错误理解相关概念,从而增加了复变函数的学习难度。笔者在多年的复变函数教学中,常常采用对比法,首先复习数学分析或高等数学中的相关概念,然后把相似的概念推广的复变函数中来,这样学生易于接受,效果比较好,而且能极大地提高学习效率。在此过程中,再由学生自己去寻找、发现两者之间的不同,并多次强调复变函数与实变函数的不同之处。以下对复变函数的特有性质加以总结,并给出一些具体的教学案例,希望能给学生和老师一些借鉴。

1. 复初等函数的特有性质

复初等函数^[1]形式上与一元实基本初等函数^[2]一样,但它们的定义或者性质会有很大的区别。

(1) 复指数函数 e^z 具有周期性,即 $e^z = e^{z+2k\pi i}$,但是由于 $|e^z| = e^x > 0$, $(e^z)' = e^z \neq 0$,故数学分析中的微分中值定理及积分中值定理不能直接推广到复平面上来。

(2) 复正弦函数、余弦函数的许多性质与实正弦余弦函数相同,但定义是不同的,复正弦余弦函数不再具有几何意义,并且是无界的,即不再有 $|\sin z| \leq 1$, $|\cos z| \leq 1$ 。在讲授这一知识点时一定要重点强调,即使如此,也能避免学生犯错误,由此可见思维定势的威力。例如判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$ 的敛散性,很多学生会想当然的判断为绝对收敛,但其实因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n} + e^n}{2^{n+1}},$$

根据数学分析或高等数学中正项级数敛散性判断方法可知,该级数是发散的。

(3) 复对数函数是复指数函数的反函数,由方程 $e^w = z$ 可以解出 $w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$,

此式说明非零复数均可以取对数,其对数值仍为复数,虚部为复数 z 的辐角。由非零复数辐角的多值性可知复对数函数是无穷多值的。而实对数函数是单值的,并且只有正实数才可以取对数。

在复数域内,幂函数 $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$,三角函数

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

等,反三角函数

$$\operatorname{Arc} \sin z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}), \quad \operatorname{Arc} \cos z = -i \operatorname{Ln}(z + i\sqrt{1-z^2})$$

等,由此可以看出复数域中幂函数、三角函数和反三角函数都可以由复指数函数和对数函数表示,因此可以认为复变函数论的基本初等函数是复常数函数、复指数函数、复对数函数。而且复指数函数是复单值函数的核心,复对数函数是复多值函数的核心。而在实数域中,六类基本初等函数是无法相互表示的。

2. 复变函数的特有性质

设 E 为一复数集合,若存在一个对应法则 f ,使得对任意的 $z \in E$,都存在复数 w 与 z 相对应,则称 f 是定义在 E 上的复变函数,简称复变函数^[1]。由于复变函数的定义中并未声明 w 的唯一性,所以复变函数可能是单值的,也可能是多值的。如前面提到的复对数函数、复幂函数、复反三角函数都是多值函数,究其原因,复变函数的多值性都是由复数 z 的辐角的多值性引起的。

复变函数的极限定义 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 在形式上与一元实函数的极限定义一样,但本质却不同,复变函数的极限在本质上同二元实函数的极限一致,即 $z \rightarrow z_0$ 等价于 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 。教师在讲授这一内容时一定要多加强调,因为后面的连续、可导、解析都离不开极限,而且这也正是复分析与实分析不同的根源。

(2) 复变函数在一点 z_0 处解析的条件是比较强的,要求在 z_0 的某个邻域内都是可微的,所以复变函数在点 z_0 解析,则在 z_0 处肯定可导;反之则不一定。但是复变函数在区域内的可导性与解析性是等价的,从而由可导的定义可以推出可导与解析的判定条件。此外,解析函数的实部和虚部不是任意的,它们是可以相互确定的,即由实部(虚部)可以确定虚部(实部)。这部分内容在讲授时要用到大量关于二元实函数可微性方面的结论,建议学生提前复习数学分析或高等数学中相关的内容。解析函数的另一个独特的性质是它的无穷可微性,即解析函数的任意阶导数仍解析,这一性质使得解析函数很容易就可在解析点处展开成泰勒级数。

(3) 复变函数的积分定义思路与一元实函数定积分的定义思路一样,都是分割、取近似、求和、取极限。不同的是把实定积分中沿着数轴从点 a 到点 b 的积分路径推广到了复平面上沿着曲线从起点 z_0 到终点 z_1 的积分路径,所以复积分的基本性质与实数域中第二型曲线积分的性质基本一样。但也有些不同之处,比如复积分中的牛顿—莱布尼兹公式与一元实函数的牛顿—莱布尼兹公式形式上一样,但适用的条件不同。对一元实函数,只要求被积函数在积分区间上连续,牛顿—莱布尼兹公式就成立;对复积分,被积函数连续只能保证积分存在,但不能保证牛顿—莱布尼兹公式成立,因为复积分是曲线积分,牛顿—莱布尼兹公式是否成立与被积函数是否在某个单连通区域内解析有关,即如果复积分的上下限都包含在被积函数的某个解析的单连通区域内,则牛顿—莱布尼兹公式成立。积分路径上无奇点的复积分的计算可参照下面的步骤。

复积分	围线积分	被积函数在围线内部解析 $\Rightarrow$ 积分为零
	被积函数在围线内有奇点 $\Rightarrow$	$\begin{cases} \text{只有一个奇点} \Rightarrow \text{直接利用积分公式} \\ \text{有多个奇点} \Rightarrow \text{利用积分定理分解再求积分} \end{cases}$
非围线积分	积分与路径有关 $\Rightarrow$	利用参数方程法
	积分与路径无关 $\Rightarrow$	利用牛顿-莱布尼兹公式

(4) 解析函数的洛朗展式是一个双边幂级数, 它不仅包含非负整数次幂项, 也包含负整数次幂项, 所以泰勒级数可以看作是洛朗级数的特殊情形。如果一个复变函数在某个区域内可以展为泰勒级数, 那么它在这个区域的洛朗展式就是那个泰勒级数。一般来说, 如果一个复变函数在圆盘内解析, 则能够展开为泰勒级数; 如果函数在一个圆环内解析, 则展开式为洛朗级数。洛朗级数可以用来研究解析函数在孤立奇点附近的性质。这部分内容在数学分析中没有相应的讨论, 学生理解起来会比较困难, 最好是通过不同的例题来引入非孤立奇点与孤立奇点的类型。比如,

$\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ 的奇点有 0 , $\frac{1}{k\pi} (k \neq 0)$, 因为 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k\pi} = 0$, 所以 0 不是

孤立奇点。在讨论孤立奇点的三种类型时, 可以借助于洛朗级数来理解, 如当 $0 < |z| < +\infty$ 时, $\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$, 因为右端的级数在 $z=0$ 处解析, 所以孤立奇点 $z=0$ 为 $\frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点,

即可以去掉的奇点; 又 $\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \dots$, 右端出现负次幂项, 负次幂的最高次为 2, 所以当上式的左右两端都乘以 z^2 时, 则右端的级数部分解析, 从而 $z=0$ 为 $\frac{\sin z}{z^3}$ 的二阶极点;

但是, 由于 $\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \dots$ 的右端洛朗级数的负次幂项的指数趋于无穷大, 负次幂项是无论如何都消不掉

的, 所以 $z=0$ 为 $\sin \frac{1}{z}$ 的本质起点。一旦学生理解了这些定义及不同, 后面关于孤立奇点的性质及定理理解起来就容易些了。

(5) 留数 (又可称为残数) 是复变函数论中所独有的又一个重要概念。留数的概念最早是在 1825 年由柯西提出的。由于对解析函数的洛朗展开式进行积分时只留下一项 $(z-z_0)^{-1}$, 因此称它的系数 C_{-1} 为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数。教学过程中的一个重难点是如何利用留数来计算实积分, 特别是那些原函数不容易直接表示出来的定积分和广义积分。利用计算这些积分时, 首先要考虑的是怎么把实积分转化成复变函数的周线积分。由于不同类型的实积分计算方法不同, 所以讲授过程中可以先讲解例题, 举一反三, 让学生归纳总结出一一般形式。除了计算定积分, 留数在很多问题上都有重要应用, 如函数零点与极点个数的计算, 将亚纯函数展开为部分分式, 将整函数展开为无穷乘积, 稳定性理论, 渐近估计等^[1]。

总之, 在复变函数的教学中要应用类比、对比的方法引导学生把数学分析或高等数学中相似的概念及结论推广到复数域来, 总结出复变函数的特有性质, 再进行深入的研究, 以便加深理解, 达到融会贯通的目的, 进而提升到应用的高度, 培养学生理论联系实际及解决实际问题的能力。

参考文献:

- [1] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [2] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [3] 石丽仙. 柯西复分析思想探究[D]. 山西师范大学, 2013.

作者简介: 王国欣(1984-), 女, 汉族, 河南南阳, 南阳理工学院, 讲师, 硕士, 研究方向: 数学及最优化。

基金项目: 河南省高等学校重点科研项目(19A110027)。