# 含参数的不等式恒成立问题

◆姚娅琪

（西安市长安区第二中学　710100）

摘要：由于不等式恒成立问题往往都可以转化为函数的最值问题，本节课应用不等式恒成立问题的常见类型，引导学生体会转化与化归、数形结合、分类讨论等数学思想，由浅入深，由简到难，探讨如何来解决这类问题，逐步培养学生的分析问题和解决问题的能力。

关键词：参数不等式最值

**教材分析：**

不等式恒成立问题是近年高考的热点问题，交汇函数、方程、不等式和数列等知识，有效地考查学生的逻辑推理和逻辑思维能力等综合应用能力，所以也是难点，学生的得分率相对较低。

**教学目标**

知识与能力：

学会含参数不等式恒成立问题向函数最值问题的转化，会求一些简单函数的最值。

教学过程与方法：

通过实例探讨研究，体会数学从已知到未知，从数到形、从简单到复杂，以及参变分离中的转化与化归、数形结合、分类讨论等思想。促进学生的理性精神，让学生具有分析问题和解决问题的能力。

情感态度与价值观：

培养学生的探究精神，体会事物之间既可以相互转化同时又具有统一性的辩证唯物主义思想。

**教学重点：**不等式恒成立问题的解决方法以及求函数的最值问题。

**教学难点：**渗透转化和化归思想到数学学习内容和解题过程中,对含参数不等式的恒成立问题的转化。

**教学课时:**1 课时

**教学过程：**

**一、思考讨论，合作交流**

引例：

若 $x+a\geq 0$ 当 $x\in[1,2]$ 时恒成立，求 a 的取值范围。

方法一：（数形结合）令 $f(x)=x+a$，做出一次函数的图像，求出函数 f(x) 在 $x\in[1,2]$的最小值大于零即可。

方法二：不等式变形为 $x\geq -a$，只要 x 的最小值大于$-a$ 即可。

方法三：不等式变形为 $a\geq -x$，只要$-x$ 的最大值小于 a 即可。

**总结模型：**

$\forall x\in D$,若$f(x)\geq a$恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min}\geq a$

$\forall x\in D$,若$f(x)\leq a$恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max}\leq a$

**[设计意图]**从学生熟悉的函数入手，从数形结合与代数的角度，寻找不等式恒成立问题的解决方法。在学生已有的认知水平和已有经验的基础上，提高学生思辨高度，体悟转化与化归的思想，符合学生的最近发展区和一般的认知规律。引导学生在熟悉多种方法的基础上，建立解决含有两个变量的恒成立问题的数学模型，为学生在高三复习过程中如何归纳总结起到抛砖引玉的作用。

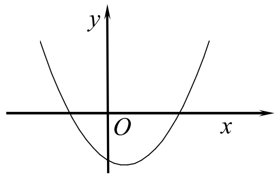
**二、典例精析、概念深化**

例 1、若 $x^2-ax+2\geqslant 0$，当 $x\in[1,2]$时恒成立，求 a 的取值范围。

方法一：（分类讨论法，数形结合）把不等式左边看成二次函数 $f(x)=x^2-ax+2$，讨论函数图像对称轴 $x=\frac{a}{2}$的位置，判断在区间$x\in[1,2]$上的单调性。分别求函数 $f(x)=x^2-ax+2$ 的最小值大于 0。

方法二：（分离常数法，构造新函数）不等式变形为：$a\leq x+\frac{2}{x}$，求出 $f(x)=x+\frac{2}{x}$ 的最小值大于 a，提醒学生：要验证等号成立的条件。若把定义域改为[−1，2]，又该怎么做呢？

方法一中我们应用数形结合的方法来解决问题，但前提条件是我们所构造的函数图像必须是容易做出来的。方法二中我们能得出什么结论呢？




**[设计意图]**让学生明白在应用数形结合的方法解决问题时，前提条件是所构造的函数图像必须是容易做出来的，同时，对于“对称轴动、区间定”或“对称轴定、区间动时”。求二次函数的最大最小值时，让学生意识到对参数要进行分类讨论的问题。

思考 1：

1、在问题2"当$x\in[1,2]$时，不等式$x^2-ax+2\geq 0$恒成立，求$a$的取值范围。"中参数的位置是否还可以变化吗？变化之后怎么解决？

2、不等式中含有 $a$和$x$两个变量，若把条件改 为$a\in[1,2]$,求$x$的取值范围，这个问题你会解决吗？

【设计意图】在学生熟悉的二次不等式中，让参数的位置发生变化，学生可以解决，使问题简单化，引导学生对各种形式的含参数二次不等式进行总结归纳，目的使学生在复习过程中，能够想到其它不等式中参数位置的不同也会引起构造出的函数的不同，在高三复习过程中可以起到事半功倍的作用。

例2、已知函数$f(x)=x^2-a\ln x+a(a>0)$在$(0,+\infty)$满足$f(x)\geq 0$恒成立，求$a$的取值范围.

本题能否用数形结合呢？大家发现函数的图像不易做出来。那么我们该怎么做呢？

学生先自己解决，在学生求最值有困难时，我做以下复习：

**应用导函数求函数最值的步骤：**

求函数定义域为先，导数为零根求见，无根全域增或减，有根标在数轴间，根分定义域为区间，列表增减极值现，极值和端点值求遍，最值就在这里边。

【**设计意图**】让学生自己发现数形结合是应用于图像便于做出的函数中的，当发现图像不易做出时，就要构造函数求最值，此时，有些同学可能对应用导数求最值的过程与方法有些困难，而编成口诀使学生朗朗上口，更容易掌握。

解：$f(x)=x^2-a\ln x+a$，$f'(x)=2x-\frac{a}{x}=\frac{2x^2-a}{x}=0$,

$a>0,x>0$ $x\overset{解得}{=}\sqrt{\frac{a}{2}}$

| $x$ | $(0,\sqrt{\frac{a}{2}})$ | $\sqrt{\frac{a}{2}}$ | $(\sqrt{\frac{a}{2}},+\infty)$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $f'(x)$ | ↘ | 0 | ↗ |
| $f(x)$ | | 极小值 | |

由表可得：

$\because\ \forall x\in(0,+\infty)$, $f(x)\geq 0$恒成立

$\therefore\ \forall x\in(0,+\infty)$, $f(x)_{\min}\geq 0$

$\therefore\ \frac{a}{2}(3-\ln\frac{a}{2})\geq 0$ $\therefore \ln\frac{a}{2}\leq 3,\therefore a\leq 2e^3$

又 $a>0$，$\therefore$ $a\in(0,2e^3]$

【**设计意图**】用数形结合方法不能做出函数图像，形成认知

冲突，激发学生的学习兴趣，使学生有目的的进行转化，并轻松的解决求最值问题。

**三、应用探究，触类旁通**

**思考2**：该题是以一种函数的形式给出的，你还可以把这道题改变为其它形式吗？(让学生改编)

变式1：已知函数$f(x)=x^2+a$，$g(x)=a\ln x(a>0)$,对任意$x\in(0,+\infty)$，$f(x)\geq g(x)$恒成立，求$a$的取值范围.

解析：∵ $\forall x\in(0,+\infty)$ 有 $f(x)\geq g(x)$ 恒成立

即 $\forall x\in(0,+\infty)$，$x^2+a-a\ln x\geq 0$恒成立

∴ $\forall x\in(0,+\infty)$ $f(x)-g(x)\geq 0$ 恒成立

由例题可得，$a\in(0,2e^3]$

变式2：已知函数 $f(x)=x+\frac{a\ln x}{x}$($a$为常数)，若对任意 $a\in(0,m]$,有函数$f(x)$在定义域内单调递增，求 $m$的最大值．

解析：函数的定义域为（$0,+\infty$）

∵ $f(x)$在定义域单调递增，

∴ $f'(x)\geq 0$在定义域内恒成立

即$f'(x)=1+\frac{a-a\ln x}{x^2}=\frac{x^2-a\ln x+a}{x^2}\geq 0$

∴ $x^2-a\ln x+a\geq 0$

∵ $a\in(0,m]$

由例题可得，$a\in(0,2e^3]$

∴ $m$的最大值为 $2e^3$

**【设计意图】**引导学生经过分析，将未知转化为已知，其中也体现了转化和化归的思想，同时提醒学生，在平时的学习中要学会将类似的题目进行比较和归纳。

**四、课堂小结：**

1、合理转化：对于$f(x)\geq a$或$f(x)\leq a$形式呈现的恒成立问题，我们可以构造新函数，利用导数在求解函数最值的优越性，从而轻松、简捷地解决相应问题.

2、等价结论

(1).对$\forall x\in D$,有$f(x)\geq a$恒成立 ⇔ 对$x\in D$，$f(x)_{\min}\geq a$;

(2).对$\forall x\in D$,有$f(x)\leq a$恒成立 ⇔ 对$x\in D$，$f(x)_{\max}\leq a$.

形式推广：

(1).对$\forall x\in D$,有$f(x)\geq g(x)$恒成立 ⇔ 对$\forall x\in D$，$f(x)-g(x)\geq 0$恒成立 ⇔ 对$\forall x\in D$,$[f(x)-g(x)]_{\min}\geq 0$;

(2)对$\forall x\in D$,有$f(x)\leq g(x)$恒成立 ⇔ 对$\forall x\in D$，$f(x)-g(x)\leq 0$恒成立 ⇔ 对$\forall x\in D$,$[f(x)-g(x)]_{\max}\leq 0$;

3、数学思想和数学方法：转化与化归，数形结合，分类讨论。通过构造函数判断其单调性、求函数的最值。

**五、课堂练习：**已知函数$f(x)=e^x-2x-2a$，若 $f(x)\geq 0$恒成立，求实数$a$的取值范围。

**六、课后作业：**

已知函数$f(x)=e^x-2x+2a$，若$f(x)\geq 0$恒成立，求实数$a$的取值范围。

**七、课后延伸**

思考：已知 $f(x)=x+\frac{a^2}{x}$,$g(x)=-x^2+2\ln x$,其中 $a>0$，若对于 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，都有$f(x_1)\geq g(x_2)$恒成立，求 $a$的取值范围

做完该题后，你能总结做这类题的模型吗？

**【设计意图】**通过课堂练习课后作业和课后延伸，给学生一些思考的空间，让学生学会自主学习，为终身学习打下良好的基础，养成良好的数学学习习惯，不断提高数学学习素养。

**参考文献：**

[1]罗增儒　基于核心素养的教学研修——在“核心素养背景下数学教师的专业发展”（南京）会议上的发言（整理）中学数学教学参考（上旬） 2018年第9期

[2]田晓霞“导数的综合应用——不等式恒成立问题的一种常见类型”的教学设计 中学数学教学参考(上旬)2018年第9期

[3]陈时见 课堂学习论　广西师范大学出版社　2005.2