凸透镜成像规律的代数研究

◆王祉鉴

（江苏省射阳中学　江苏省射阳县　224300）

我记得初二刚学凸透镜成像时，我们班的一位同学告诉我，她在课外习题中看到这么一个结论，说凸透镜成实像时，物距与像距的倒数和等于焦距的倒数（即$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$）.我当时就试图过去证明这个结论，但发现无从下手.我就暂且将它放在了一边.

到初三后，进行第一轮复习.当复习到凸透镜成像规律这一块时，我又想起了这个问题.我决定证明它.

本着从特殊到一般的思想，我决定将物体在凸透镜的两倍焦点上时成倒立等大的实像这个特殊的成像规律代入式子验证一下，发现：当$u=v=2f$时，

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{2f}+\frac{1}{2f}=\frac{1}{f}$$

满足$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$的结论.

但这毕竟是特殊情况，不具有普遍性.所以我开始研究一般情况下物距、像距和焦距是否满足这个式子.然而，我仍然没有什么思路。

有一次，我在阅读数学读物时，看到这么一句话，说数学是解决自然科学问题的关键.我感到非常赞同.我想，我为什么不从数学的角度去看待这个问题呢？

经过分析，我终于找到了一种证明方法.这里，我用到了我们物理老师封老师教给我们的一种光学作图法.这种方法假设物体高度为凸透镜的一半，再经过光折射的规律找到像的位置（如图 1）.

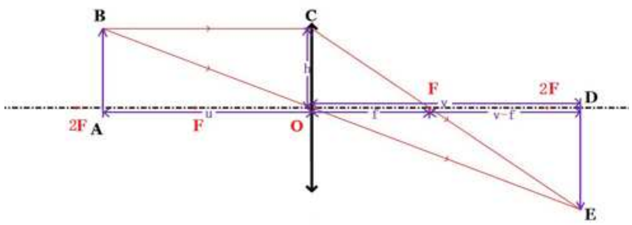

图 1

证明过程如下：

证明：

∵CO⊥OD，ED⊥OD

∴CO∥DE

∴△COF∽△EDF（预备定理）

$$\therefore \quad \frac{CO}{DE}=\frac{OF}{DF} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{h}{DE}=\frac{f}{v-f} \qquad (2)$$

$$\therefore \quad DE=\frac{h(v-f)}{f} \qquad (3)$$

∵BA⊥AD，ED⊥AD

∴BA∥DE

∴△ABO∽△DEO（预备定理）

$$\therefore \quad \frac{AB}{DE}=\frac{AO}{OD} \qquad (4)$$

$$\therefore \quad \frac{h}{\frac{h(v-f)}{f}}=\frac{u}{v} \qquad (5)$$

$$\therefore \quad vf=uv-uf \qquad (6)$$

移项得

$$vf+uf=uv \qquad (7)$$

等式两边同时除以uvf（$uvf\neq 0$）得

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f} \qquad (8)$$

（证毕）

果然，物距、像距和焦距是满足这个关系的.

由于光折射时，光路是可逆的，所以当物体在两倍焦点之外时，上述关系依然成立，这里就不再证明了.

后来，我又想到，在凸透镜成实像时，这个关系成立，那么当物体在一倍焦距内，即当凸透镜成虚像时，这个关系成不成立呢？

我用类似的方法作了图，并探究出了结论（如图 2）.

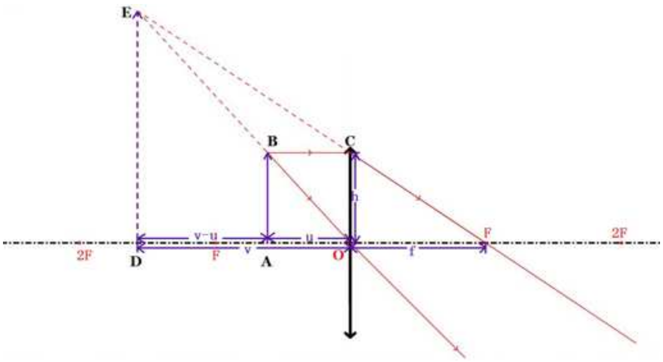

图 2

过程如下：

解：

∵CO⊥DF，ED⊥DF

∴CO∥DE

∴△COF∽△EDF（预备定理）

$$\therefore \quad \frac{CO}{ED}=\frac{OF}{DF} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{h}{h'}=\frac{f}{v+f} \qquad (2)$$

∵BA⊥DO，ED⊥DO

∴AB∥DE

∴△ABO∽△DEO（预备定理）

$$\therefore \quad \frac{AB}{DE}=\frac{AO}{DO} \qquad (3)$$

$$\therefore \quad \frac{h}{h'}=\frac{u}{v} \qquad (4)$$

由（2）（4）得

$$\frac{f}{v+f}=\frac{u}{v} \qquad (5)$$

$$\therefore \quad vf=uv+uf \qquad (6)$$

移项得

$$vf-uf=uv \qquad (7)$$

等式两边同时除以uvf（$uvf\neq 0$）得

$$\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=\frac{1}{f} \qquad (8)$$

得到的结论是$\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$，这与成实像时的规律居然完全不同，真是令人惊讶.

综上所述，当凸透镜成实像时，物距与像距的倒数和等于焦距的倒数，即$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$；当凸透镜成虚像时，物距与像距的倒数差等于焦距的倒数，即$\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$.

当我们得到了一个初步的结论时，不能随意将它推广到其他情况上去；只有进过严谨的论证的结论才是最具有说服力的.