Stolz 定理在计算数列极限中的应用

◆邓 艳

（武警警官学院基础部 四川成都 610200）

摘要：极限理论是高等数学的基础，其中数列极限是它的重要组成部分，求数列极限的方法众多，本文先给出了 Stolz 定理及其证明，然后介绍了 Stolz 定理在计算数列极限中的应用。

关键词：Stolz 定理；数列极限；应用

一、Stolz 定理

设数列 $\{y_n\}$ 单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$（其中 l 为有限数，$+\infty$ 或者为 $-\infty$），则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=l$.

证明:（1）设 l 为有限数，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$ 得，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-l\right|<\varepsilon$，即 $l-\varepsilon<\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<l+\varepsilon$，又于是得到一系列不等式：

$$(y_{N+1}-y_N)(l-\varepsilon)<x_{N+1}-x_N<(y_{N+1}-y_N)(l+\varepsilon)$$
$$(y_{N+2}-y_{N+1})(l-\varepsilon)<x_{N+2}-x_{N+1}<(y_{N+2}-y_{N+1})(l+\varepsilon)$$
$$\vdots$$
$$(y_n-y_{n-1})(l-\varepsilon)<x_n-x_{n-1}<(y_n-y_{n-1})(l+\varepsilon)$$

将不等式相加，得

$$(y_n-y_N)(l-\varepsilon)<x_n-x_N<(y_n-y_N)(l+\varepsilon)$$

两边同除以 y_n，得

$$(1-\frac{y_N}{y_n})(l-\varepsilon)<\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_N}{y_n}<(1-\frac{y_N}{y_n})(l+\varepsilon)$$

又因为当 $n\to\infty$ 时，$y_n\to\infty$，故 $l-\varepsilon<\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}<l+\varepsilon$

由 ε 的任意性，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

（2）设 l 为 $+\infty$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$ 得，$\forall M>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}>M$，因为 $y_n-y_{n-1}>0$，所以 $x_n-x_{n-1}>0$ 即 $\{x_n\}$ 单调递增；再用与（1）类似的方法得一组不等式，经相同的步骤后可得

$\dfrac{x_n-x_N}{y_n-y_N}>M$，即 $x_n-x_N>M(y_n-y_N)>(y_n-y_N)$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，于是把已经证明了的定理用于 $\dfrac{y_n}{x_n}$；则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0$，于是可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=+\infty$.

同理可证当 l 为 $-\infty$ 时，结论成立.

二、Stolz 定理的应用

例 1.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}$.

解：令 $x_n=\sum\limits_{p=1}^{n}p!$，$y_n=n!$，则 y_n 单调递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n!-(n-1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n!(1-\frac{1}{n})}=1$

所以满足 Stolz 定理的条件，于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=1$$

例 2.已知 $a_n=\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$，$z_n=n(a_n-\dfrac{1}{k+1})$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$.

解：$z_n=n(a_n-\dfrac{1}{k+1})=\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\dfrac{n}{k+1}=\dfrac{(k+1)(1^k+2^k+\cdots+n^k)-n^{k+1}}{(k+1)n^k}$

令 $x_n=(k+1)(1^k+2^k+\cdots+n^k)-n^{k+1}$，$y_n=(k+1)n^k$，则 y_n 单调递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)n^k-[n^{k+1}-(n-1)^{k+1}]}{(k+1)[n^k-(n-1)^k]}$$

而 $(k+1)n^k-[n^{k+1}-(n-1)^{k+1}]=\dfrac{k(k+1)}{2}n^{k-1}+\cdots$

$n^k-(n-1)^k=kn^{k-1}+\cdots$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{k(k+1)}{2}n^{k-1}+\cdots}{k(k+1)n^{k-1}+\cdots}=\dfrac{1}{2}$

满足 Stolz 定理的条件，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}==\dfrac{1}{2}$.

例 3.已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot a_1+2a_2+\cdots na_n}{n(n+1)}$.

解： 令 $x_n=1\cdot a_1+2a_2+\cdots na_n$，$y_n=n(n+1)$，则 y_n 单调递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na_n}{n(n+1)-n(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2}=+\infty$，

满足 Stolz 定理的条件，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot a_1+2a_2+\cdots na_n}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$.

注意：定理中如果 l 为 ∞ 时，结论不一定成立.例如，设 $x_n=(-1)^n n$，$y_n=n$，则 y_n 单调递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，虽然

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n(2n-1)=\infty$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\neq\infty$.

参考文献：

[1]Γ. M. 菲赫金哥尔茨著，叶彦谦，译.微积分教程（第八版）[M].北京，人民教育出版社，2011.

[2]蒲和平，大学生数学竞况赛教程[M].北京，电子工业大学出版社，2014.

[3]华东师范大学数学系，数学分析（上）[M].北京，高等教育出版社，1999.