

# 利用导数求极值的新解法探索

◆方旅君

(余姚市技师学院(筹)(余姚市职成教中心) 315400)

摘要:传统教材出现的利用导数求极值,有一定难度,这里尝试用新方法求极值降低学习难度

关键词:函数;导数;极值;求解

传统教材中利用导数求极值的方法,对于职业高中学生来讲,还是有一定难度,这里尝试用新方法求极值,目的让职高学生能降低学习难度,也让普高学生丰富解题路径。

## 一.传统教材利用导数求极值的依据及步骤

### 1.极值的概念

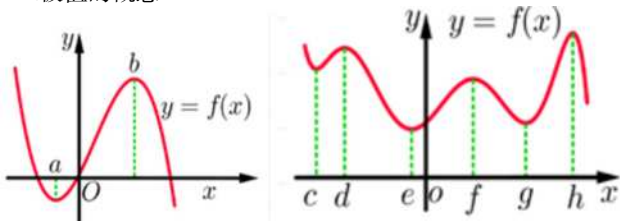


图1

如图1,连续函数  $y=f(x)$  在  $x=a$  及其附近有定义,函数  $f(a)$  的值比  $a$  附近所有各点的函数值都小,我们就说  $f(a)$  是函数  $y=f(x)$  的一个极小值;同理在  $x=b$  及其附近有定义,则函数  $f(b)$  的值比  $b$  附近所有各点的函数值都大,我们就说  $f(b)$  是函数  $y=f(x)$  的一个极大值。

### 2.导数求极值的依据

在图1中,连续函数  $y=f(x)$  图线在极值点  $(a,b)$  的导数满足  $y' = f'(x) = 0$ 。因此只要求出函数的导数  $f'(x) = 0$  的根  $x_1 = a$  或  $x_2 = b$ ,就可以求出根  $x_1, 2$  处函数极值  $f(a), f(b)$ ,接着判别  $f(a), f(b)$  是极大值还是极小值

### 3.传统教材中利用导数判断极值的方法是:

①对连续函数  $y=f(x)$ ,如果在  $x_0$  (在图1中是  $x_0 = a$ ) 处附近的左侧  $f'(x) < 0$ ,右侧  $f'(x) > 0$ ;那么,  $f(a)$  是极小值②如果在  $x_0$  (在图1中是  $x_0 = b$ ) 处附近的左侧  $f'(x) > 0$ ,右侧  $f'(x) < 0$ ;那么  $f(b)$  是极大值。

### 4.传统教材中求函数极大(小)值的步骤

如果  $y=f(x)$  在某个区间有导数,就根据如下的步骤求极大(小)值:

第一步:求导数  $f'(x)$ 。第二步:求方程  $f'(x) = 0$  的根,确定极值的坐标位置及极值大小。第三步:确定是极大值还是极小值。

### 5.传统教材利用导数求极值容易遇到困难的主要步骤

在求极值的三个步骤中,很关键的第三步判断极大值(或者极小值),需要记住规律(函数的导数  $f'(x) = 0$  在根处附近左右正负,函数在根处是极大值;反之,就是极小值),而要确定  $f'(x) = 0$  在根处正负,需要解不等式,这些步骤对职高学生来讲是存在一定困难。

## 二.利用导数求极值新方法的理论依据及步骤

### 1新方法求极值的理论依据

函数在相邻两个极值点之间的任意一个函数值总是满足比极大值小,比极小值大。在如图1所示的函数  $y=f(x)$  的图像上可以看到在  $x \in (a,b)$  中任意一个数值  $x$  对应的函数值  $f(x)$ ,都满足  $f(x) > f(a)$ ,同时  $f(x) < f(b)$  根据这个特点,得出判断极大(小)值的方法。

### 2判定函数 $y=f(x)$ 的极大值,极小值方法如下

如图1所示的函数  $y=f(x)$ ,在  $x \in (a,b)$  中,任意取一个数值  $x$  对应的函数  $f(x)$  的数值,如果  $f(x) > f(a)$ ,则判定  $f(a)$  为极小值;如果  $f(x) < f(b)$ ,则判定  $f(b)$  为极大值。同理如图1所示的函数  $y=f(x)$  图像上,在任意相邻两个极值点之间,都可以判断极大值与极小值。

1) 在  $x \in (c,d)$  中任意一个数值  $x$  对应的函数值  $f(x)$ ,都满足  $f(x) > f(c)$ ,同时  $f(x) < f(d)$  故  $f(c)$  判定为极小值,  $f(d)$  判定为极大值

2) 在  $x \in (d,e)$ , 在  $x \in (e,f)$ , 在  $x \in (f,g)$ , 在  $x \in (g,h)$  都一样道理

从上面分析可得求极值的新方法:在相邻两个极值点  $a,b$  之间任意取一个  $x$ ,  $x$  对应的函数值为  $f(x)$ ,如果  $f(x) > f(a), f(x) < f(b)$ ,则  $f(a)$  为极小值,  $f(b)$  为极大值。

### 3新方法求极值的步骤以及在具体例题中应用

如果  $y=f(x)$  在某个区间有导数,就可以采用如下的步骤求极大(小)值:第一步:求导数  $f'(x)$ 。第二步:求方程  $f'(x) = 0$  的根,确定极值的坐标位置及极值大小。第三步:确定是极大值还是极小值,具体方法如下:在相邻两个极值点  $a,b$  之间任意取一个  $x$ ,  $x$  对应的函数值为  $f(x)$ ,如果  $f(x) > f(a), f(x) < f(b)$ ,则  $f(a)$  为极小值,  $f(b)$  为极大值。

例如:求函数  $f(x) = x^3/3 - 4x + 4$  的极值

分析:第一步求函数  $f(x)$  的导数,则  $f'(x) = x^2 - 4$ 。第二步求  $f'(x) = 0$  的根,得  $x_1 = -2, x_2 = 2$ 。第三步,求出  $x_1 = -2$  处的函数值  $f(-2) = 28/3$ ,求出  $x_2 = 2$  处的函数  $f(2) = -4/3$ 。在  $(-2, 2)$  之间任意取一个数值  $x$ ,假如  $x = 0$ ,代入  $f(x) = x^3/3 - 4x + 4$  得  $f(0) = 4$ 。比较得:  $f(0) < f(-2)$  则根  $x_1 = -2$  处有极大值,极大值为  $f(-2) = 28/3$ 。

$f(0) > f(2)$ ,则根  $x_2 = 2$  处有极小值,极小值为  $f(2) = -4/3$

## 三.新方法求极值的特点及作用

### 1知识点更简明

传统教材判定极值的第三个步骤,需要用到不等式知识,以及记住极值处附近导数的判定法则,比较复杂。新方法第三步,只要在相邻两个极值区域内任取  $f(x)$ ,与极值比较大小即可。新方法第三步只有比较数值大小一个知识点,故理论更简明。

### 2计算会更方便

因为利用新方法求极值时,当求出极值点处的极值后,可以任意取一个容易计算的数值  $x_0$  代入原函数中,求出  $f(x_0)$ ,与极值点处的极值进行比较,来确定极值点处的极值是极大还是极小值。故应用知识点变少,计算难度降低;对于不需要严密求证的选择題,填空题,解题速度更快,所以新方法计算更方便。

### 3新方法求极值的用途

利用新方法求导数,避开不等式求解,以及极值判断法则,这样能帮助不等式知识掌握不好的学生,以及思维能力较差,计算能力较弱的学生,很好地去解决极值求解问题。故适用职高学生去学习掌握,对普高学生来说多掌握一种解题途径能提高解题速度。

### 参考文献:

[1]数学及解题指导(人民教育出版社中学数学室编)

作者简介:方旅君(1969.02-),男,汉族,浙江余姚,高级教师。

