

# 多法因式分解

◆李晓伟<sup>1</sup> 李鹏<sup>2</sup> 李亚伟<sup>3</sup> 李佳润<sup>4</sup> 蔺兴芹<sup>5</sup>

(1、3 银川兴庆区巨人教育学校; 2、5 银川金凤区海培教育培训学校; 4 济南钢城实验学校初二)

摘要: 本文介绍了因式分解是整式乘法的逆运算, 介绍了多种方法, 启发读者仔细研究方法, 灵活应用。培养数学爱好与兴趣, 学好数学。

中学数学学习了4种因式分解法, 如提公因式法、公式法、分组分解法、十字相乘法。仍然在教学中发挥着作用。目前, 初中数学教学大纲至多讲解四种基本方法, 甚至考试大纲只要求两种, 远远满足不了数学学习及解决问题的需要。

## 1 定义

把一个多项式化为因式相乘的形式叫做因式分解。它是整式乘法的逆运算, 是最重要的数学恒等变形之一, 是解决数学问题的有力工具。因式分解方法灵活, 技巧性强。

## 2 方法

### ①提公因式法

如果多项式各项都含有公因式, 可以提出来, 将多项式化成因式乘积的形式。

$$ax+bx+cx=x(a+b+c)$$

### ②公式法

分解因式与整式乘法互逆, 八大乘法公式反过来, 就可以用来把多项式分解因式。对于那些不能利用公式法的多项式, 有的可以利用将其配成一个完全平方, 然后再利用平方差公式, 将其因式分解。

### ③分组分解法

多项式  $am+an+bm+bn$ , 先把前两项分成一组, 提出公因式  $a$ , 把后两项分成一组, 提出公因式  $b$ , 得到  $a(m+n)+b(m+n)$ , 又提出公因式  $m+n$ , 得到  $(a+b)(m+n)$

### ④十字相乘法

利用十字交叉线来分解系数, 把二次三项式分解因式的方法叫做十字相乘法。

对于二次三项式  $x^2+bx+c$ , 若存在  $\begin{cases} pq=c \\ p+q=b \end{cases}$ , 则

$$x^2+bx+c=(x+p)(x+q)$$

首项系数不为1的十字相乘法

在二次三项式  $ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ) 中, 二次项系数  $a$  可分解成两个因数之积, 即  $a=a_1a_2$ , 常数项  $c$  可分解成两个因数之积, 即  $c=c_1c_2$ , 把  $a_1, a_2, c_1, c_2$  排列如下:

$$\begin{array}{cc} a_1 & c_1 \\ & \times \\ a_2 & c_2 \\ \hline a_1c_2 + a_2c_1 \end{array}$$

按斜线交叉相乘, 再相加, 得到  $a_1c_2+a_2c_1$ , 若它正好等于一次项系数  $b$ ,  $a_1c_2+a_2c_1=b$ , 二次三项式可分解为两个因式  $a_1x+c_1$  与  $a_2x+c_2$  之积, 即  $ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$ 。

### ⑤拆添项法

将多项式中的某一项拆成两项或多项, 或者在多项式中添上两个符号相反的项, 便于用分组分解法进行分解因式。可把多项式拆成若干部分, 再进行因式分解。

例:

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$$

### ⑥换元法

将一个较复杂的代数式中的某一部分看作一个整体, 用一个新字母替代它, 从而简化运算过程, 分解后要注意将新字母还原。有时在分解因式时, 可选择多项式中的相同的部分换成另一

个未知数, 然后进行因式分解, 最后再转换回来。

例:  $x^4-2x^2-3$ , 设  $x^2=y$ , 原式  $=y^2-2y-3=(y-3)(y+1)$ , 最后再换回来  $x^4-2x^2-3=y^2-2y-3=(x^2-3)(x^2+1)$

### ⑦主元法

先选定一个字母为主元, 然后把各项按这个字母次数从高到低排列, 再进行因式分解。当题目中的字母较多、问题较复杂时, 可把某一字母作为主元, 将其他字母作为常数解决问题。例:

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=a^2+2ab+2ac+b^2+c^2+2bc=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2=(a+b+c)^2$$

### ⑧因式定理法

若  $x=a$  时,  $f(x)=0$ , [即  $f(a)=0$ ], 则多项式  $f(x)$  有一次因式  $x-a$ ;

若两个多项式相等, 则它们同类项的系数相等。

### ⑨求根法

令多项式  $f(x)=0$ , 求出其根, 则多项式可因式分解为  $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$

⑩图象法。令  $y=f(x)$ , 做出函数  $y=f(x)$  的图象, 找到函数图象与  $X$  轴的交点  $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ , 则多项式可因式分解为  $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$ 。

⑪特殊值法。将2或10代入  $x$ , 求出数  $P$ , 将数  $P$  分解质因数, 将质因数适当的组合, 并将组合后的每一个因数写成2或10的和与差的形式, 将2或10还原成  $x$ , 即得因式分解式。

例、分解因式  $x^3+9x^2+23x+15$

解: 令  $x=2$ , 则  $x^3+9x^2+23x+15=8+36+46+15=105$

将105分解成3个质因数的积, 即  $105=3 \times 5 \times 7$

注意到多项式中最高项的系数为1, 而3、5、7分别为  $x+1, x+3, x+5$ , 在  $x=2$  时的值

$$\text{则 } x^3+9x^2+23x+15=(x+1)(x+3)(x+5)$$

### ⑫待定系数法

首先判断出分解因式的形式, 然后设出相应整式的字母系数, 求出字母系数, 从而把多项式因式分解。

例、分解因式  $x^4-x^3-5x^2-6x-4$

分析: 易知这个多项式没有一次因式, 因而只能分解为两个二次因式。

解: 设  $x^4-x^3-5x^2-6x-4=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

$$=x^4+(a+c)x^3+(ac+b+d)x^2+(ad+bc)x+bd$$

所以解得

$$\text{则 } x^4-x^3-5x^2-6x-4=(x^2+x+1)(x^2-2x-4)$$

### 3 因式分解的应用

在有理数计算、代数式的化简、求值、解方程、不等式及恒等式的证明、几何等诸多方面起着重要作用。

### 4 小结

没有数学爱好与兴趣是学不好数学的; 没有课外知识作为支撑是掌握不了课内知识的; 没有数学文化作为底蕴是考不了数学高分的。我们笔者对数学产生浓厚的兴趣。也都选择了从事中学数学教学。因式分解是恒等变形的基础, 是个极为重要的工具。在分式, 二次根式, 二次方程, 二次不等式, 二次函数, 根式方程, 分式方程甚至几何中都要用到因式分解, 重要性不言而喻。因式分解无论是在中学教学还是高等教育中都是非常重要的, 我们一定要熟练掌握。

作者简介: 李晓伟, 男, 甘肃武威人, 1989年10月生。2016年毕业于中国矿业大学银川学院, 多次获得各种数学竞赛奖项。现在银川市兴庆区巨人教育培训学校任教, 主要致力于初中数学教学, 颇受学生欢迎及家长的赞誉。

通讯作者: 李鹏。