力的冲量计算与教学探索

◆彭玉平　余　冬

（武昌首义学院　湖北武汉　430060）

摘要：本文对大学物理中关于力的冲量计算方法及教学方法进行了探讨，分析了针对不同的力冲量的不同处理方法，为本内容的教学提供了新的方法。

关键词：动量；冲量；圆锥摆

前言

大学物理的学习学生普遍感觉到难度大，其中关于力的冲量计算问题更是难中之难，因为这里面涉及到矢量和积分问题。尤其是对某质点同时受多个力同时作用时，各个力与合力对该质点的冲量的计算，学生往往难于正确选择方法。因为不同的力冲量用不同的方法，有的需要用冲量定义——力对时间积分计算，也有的需要用质点的动量定理来计算，究竟该选择哪一种方法是很多学生难于正确选择的。一旦选择错误方法，可能会事倍功半，甚至难于计算。

对于该内容的教学就需要恰当的设计物理模型来引导学生分析讨论，好的模型和方法引导会给教学带来事半功倍的效果。下面我们就来利用圆锥摆模型来分析和体会不同方法的差别，同时通过积分计算示例为学生展示如何正确的处理矢量积分在物理中的应用，以提高学生的数学在物理中的应用能力。

正文

首先教学中我们要准确分析冲量计算的两个公式，告诉学生它们的使用范围

力的冲量定义式为 $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}dt$　　（1）

质点的动量定理为 $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}dt=\vec{P}_2-\vec{P}_1=m\vec{\upsilon}_2-m\vec{\upsilon}_1$　　（2）

式（1）为力冲量计算的定义式，原则上可以计算任何变力的对质点的冲量，包括合力和分力的冲量，当然前提是能知道力的细节以便于积分；而式（2）则只能针对合力计算，因为 $\vec{P}_2$ 和 $\vec{P}_1$ 则是质点末态和初态的动量，其差值为质点动量的增量，它必须由质点受到的合外力产生，这就无需知道力的细节。动量定理建立了过程量和状态量变化之间的关系，巧妙的回避了可能的复杂过程分析。同时我们也要引导学生分清楚恒力、变力，恒力的冲量是很容易计算的，而变力的冲量往往需要复杂的积分。掌握变力冲量的矢量积分法也很有必要。

教学实践中我采取圆锥摆模型来引导学生分析分力和合力的冲量，取得了很好的效果。教学设计上，我会首先提出圆锥摆模型，引导学生分析三个力的关系及特点，然后根据不同的力设计不同的计算方法，使学生深入的体会到不同的力如何选择恰当的方法。然后我再提出两个变力的积分算法，引导学生尝试掌握。

一、冲量计算的一般性方法

如图 1 所示，圆锥摆摆长为 L，绳子张力为 f，摆球质量为 m，在水平面内做半径为 R，速率为 υ 的匀速圆周运动。摆球所受的合力为 F。求摆球运动半个周期时张力、重力及合力的冲量。

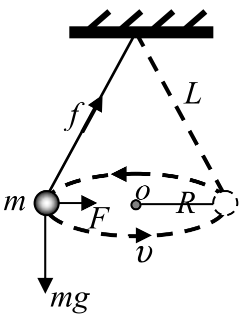

图 1

教学中先引导学生分析三个力的关系及特点，可知绳子张力和重力是真实存在的，可看作分力，而合力 F 是张力和重力的合力。根据三个力的特点利用前面的分析分别计算冲量。可知摆球圆周运动的周期为 $T=2\pi R/\upsilon$，运动半个周期的时间即为 $t_0=\pi R/\upsilon$。

合力 F 的冲量需要用动量定理计算，可知在圆锥摆运动半个周期时，其速度方向刚好与起始时速度方向反向，以末态速度方向为正方向，则由质点的动量定理可得其冲量，$I_F=\vec{P}_2-\vec{P}_1=m\vec{\upsilon}_2-m\vec{\upsilon}_1=m\upsilon-(-m\upsilon)=2m\upsilon$，方向与末速度方向一致。

重力是恒力，其冲量用式（1）计算可得 $I_{重力}=mgt_0=\pi mgR/\upsilon$。方向竖直向下，与重力方向一致。

二、变力冲量的积分算法

对于绳子张力 f 的冲量计算，若用冲力定义式计算显得较为繁琐，因为它是一个变力，运动过程中尽管其大小不变，但方向始终在变，积分计算我们后面再来给出。对张力冲量的计算可以结合三个力的矢量关系采取简单的方法，三个力满足 $\vec{f}+m\vec{g}=\vec{F}$，它们的冲量也满足 $\vec{I}_{\vec{f}}+\vec{I}_{重力}=\vec{I}_{\vec{F}}$。由图 2 几何关系可得 $I_{\vec{f}}=\sqrt{(I_{\vec{F}})^2+(I_{重力})^2}=\sqrt{(2m\upsilon)^2+(\pi mgR/\upsilon)^2}$，其方向沿末态时绳子方向。

在此基础上还可以引导学生对合外力 $\vec{F}$ 和张力 $\vec{f}$ 两个变力用定义式法算冲量，使学生更进一步的体会到定义式算法的重要性。

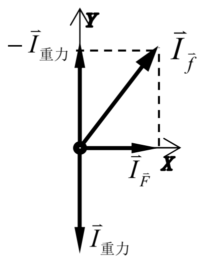

图 2

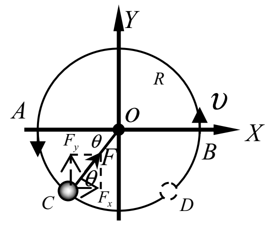

图 3

对合力 $\vec{F}$ 冲量的计算如下：

俯视圆锥摆运动平面得图 3，因摆球运动在水平面运动，故 $\vec{F}$ 也在该平面内，摆球从 A 点运动半个圆周到 B 点，设 t 时刻摆球运动到图示 C 位置，CO 连线与 AO 夹角为 θ。

由（1）式可得

$$\vec{I}_{\vec{F}}=\int_0^{t_0}\vec{F}dt=\int_0^{t_0}F_xdt\vec{i}+\int_0^{t_0}F_ydt\vec{j}=\vec{I}_x+\vec{I}_y \qquad （3）$$

可知在 x 方向运动具有对称性，该方向冲量必然为零，即 $\vec{I}_x=\int_0^{t_0}F_xdt\vec{i}=0$，因此只需计算 y 方向冲量，即

$$\vec{I}_{\vec{F}}=\int_0^{t_0}\vec{F}dt=\int_0^{t_0}F_ydt\vec{j}=\vec{I}_y \qquad （4）$$

可知圆周运动的角速度为 $\omega=\upsilon/R$，则 $\theta=\omega t=\upsilon t/R$。由摆球匀速周运动可得求得其向心力即 $F=\frac{m\upsilon^2}{R}$，在图 3 中进而可求得

$$F_y=F\sin\theta=\frac{m\upsilon^2}{R}\cdot\sin(\frac{\upsilon}{R}t) \qquad （5）$$

将（5）式与（4）式结合可得

$$I_{\vec{F}}=I_y=\int_0^{t_0}F_ydt=\int_0^{\pi R/\upsilon}\frac{m\upsilon^2}{R}\cdot\sin(\frac{\upsilon}{R}t)dt$$

$$=\frac{m\upsilon^2}{R}\cdot\frac{R}{\upsilon}\int_0^{\pi R/\upsilon}\cdot\sin(\frac{\upsilon}{R}t)d(\frac{\upsilon}{R}t)$$

$$=m\upsilon\int_0^{\pi R/\upsilon}\cdot\sin(\frac{\upsilon}{R}t)d(\frac{\upsilon}{R}t)=m\upsilon[-\cos(\frac{\upsilon}{R}t)]_0^{\pi R/\upsilon}$$

$$=-m\upsilon[\cos(\frac{\upsilon}{R}\pi\frac{R}{\upsilon})-\cos 0]=2m\upsilon$$

$\bar{F}$ 的冲量方向为在 $x-y$ 平面内沿 y 轴正向，其结果与动量定理计算结果一致。

绳子张力 $\bar{f}$ 的冲量积分计算如下：

如图4所示三个力的关系，可利用直角三角形关切得到，结合图2可知，张力 $\bar{f}$ 的冲量可分为竖直和水平面内的两个分量。$\bar{f}$ 大小恒定，但其方向随摆球运动而变化。$\bar{f}$ 竖直分量也为恒力，且其大小与重力大小相等，但方向相反，由于作用时间和重力作用时间一致，因此其竖直方向冲量大小等于重力冲量大小，即为 $I_{f_{竖直}}=\pi mgR/\upsilon$，方向竖直向上。

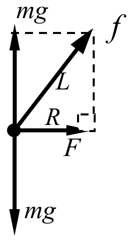

图4

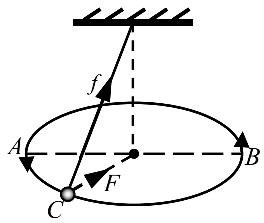

图5

由图5可知 $\bar{f}$ 的水平面内的分量就是 $\bar{F}$，其冲量用定义式积分计算过程与 $\bar{F}$ 的处理方法一致，不再赘述。即

$I_{f_{水平}}=I_{\bar{F}}=2m\upsilon$，则 $\bar{f}$ 总冲量大小为

$$I_{\bar{f}}=\sqrt{I_{水平}^2+I_{竖直}^2}=\sqrt{(2m\upsilon)^2+(\pi mgR/\upsilon)^2}$$

其结果也与前述处理结果一致。

通过上述的分析可以看出在看似简单的圆锥摆模型中却能引出非常经典的问题，将冲量计算的方法选择体现得淋漓尽致。恰当的物理模型和正确的引导分析，能为我们的教学带来意想不到的效果。

以上为本人实践教学中的一点体会，不尽完善，希望同仁们不吝赐教，予以指正。

参考文献：

[1]郭凤岐，姜大华.大学物理（上册）[M].科学技术出版社 2015年1月

[2]张三慧,大学物理学[M].清华大学出版社 1999年7月

[3]李元杰,陆果.大学物理学[M].高等教育出版社 2015年7月

作者简介：彭玉平（1977-），男，汉族，湖北省武汉市人，硕士，湖北省武汉市武昌首义学院，讲师，研究方向：物理学。