三角函数中的数学思想方法

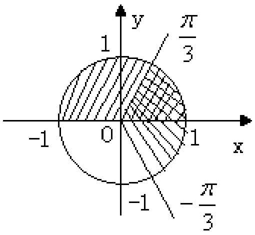
◆李　军
（山东省高密市第四中学　261500）

三角函数是基本初等函数，它是描述周期现象的重要函数模型。在数学和其他领域中具有重要的作用。在三角函数中用到的数学思想方法有换元法、数形结合法、分类讨论法、化归思想、函数与方程的思想等，下面举几例作一下总结。

一、数形结合的思想和方法

例 1. 求函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}$ 的定义域.

解析：$\begin{cases}\sin x\geq 0\\ \cos x-\frac{1}{2}\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x\geq 0\\ \cos x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$，作单位圆如图，



图中双阴影部分即为函数的定义域 $\{x\,|\,2k\pi\leq x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in Z\}$.

点评：写出关于 $\sin x$ 、$\cos x$ 的不等式组，然后根据单位圆写出解集.

二、分类讨论的思想

例 2. 已知 $-\frac{\pi}{6}\leq\beta<\frac{\pi}{4}$，试求 $\sin^2\beta-\frac{1}{2}\sin\alpha$ 的最小值.

解析：因为 $-\frac{\pi}{6}\leq\beta<\frac{\pi}{4}$，所以 $-\frac{1}{2}\leq\sin\beta<\frac{\sqrt{2}}{2}$，$0\leq\sin^2\beta<\frac{1}{2}$，所以 $0\leq 2\sin^2\beta<1$，因为 $2\sin^2\beta=3\sin^2\alpha-2\sin\alpha$，所以 $0\leq 3\sin^2\alpha-2\sin\alpha<1$，即 $\begin{cases}3\sin^2-2\sin\alpha\geq 0\\ 3\sin^2-2\sin\alpha-1<0\end{cases}$ 解得 $\frac{2}{3}\leq\sin\alpha<1$ 或 $-\frac{1}{3}<\sin\alpha\leq 0$，所以 $y=\sin^2\beta-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{1}{2}(3\sin^2\alpha-2\sin\alpha)-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{3}{2}(\sin\alpha-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{8}$. 当 $\sin\alpha\in[\frac{2}{3},1)$ 时，y 是增函数，所以当 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ 时，$y_{\min}=-\frac{1}{3}$. 当 $\sin\alpha\in(-\frac{1}{3},0]$ 时，y 是减函数.所以当 $\sin\alpha=0$ 时，$y_{\min}=0$.

综上所述，$y=\sin^2\beta-\frac{1}{2}\sin\alpha$ 的最小值为 $-\frac{1}{3}$.

点评：在三角运算中，有关三角函数所在的象限符号的选取常需要进行讨论，三角函数与二次函数的综合问题以及三角函数最值等问题也要注意讨论.

例 3. 求函数 $y=\sin^2 x+p\sin x+q$ 的最大值和最小值（其中 p,q 为常数）.

解析：$y=\sin^2 x+p\sin x+q=(\sin x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}$.

（1）若 $-1\leq-\frac{p}{2}\leq 1$，即 $-2\leq p\leq 2$，则当 $\sin x=-\frac{p}{2}$ 时，$y_{\min}=\frac{4q-p^2}{4}$；最大值在 $\sin x=1$ 或 $\sin x=-1$ 时取得.

（2）若 $-\frac{p}{2}<-1$，即 $p>2$，则当 $\sin x=-1$ 时，$y_{\min}=1-p+q$，当 $\sin x=1$ 时，$y_{\max}=1+p+q$.

（3）若 $-\frac{p}{2}>1$，即 $p<-2$，则当 $\sin x=1$ 时，$y_{\min}=1+p+q$，当 $\sin x=-1$ 时，$y_{\max}=1-p+q$.

点评：形如 $y=\sin^2 x+p\sin x+q$ 型的函数，这类问题通常是用配方法求最值，但要注意分类讨论.三角函数的最值问题是三角函数基础知识的综合应用，它往往与二次函数、三角函数图象、函数的单调性等知识联系在一起，有一定的综合性，在求解时，一定要注意三角函数式的变形方向；二要注意正、余弦函数本身的有界性，还要注意灵活选用方法.

三、换元的思想

例 4. 求使下列函数取得最大值和最小值的 x 的集合，并说出最大值和最小值是什么.

（1）$y=(\sin x-1)^2+2$;（2）$y=-\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x+\frac{5}{4}$.

解析：（1）设 $t=\sin x$，则有 $y=(t-1)^2+2$，且 $t\in[-1,1]$，于是问题就变成求闭区间上二次函数的最大值和最小值问题了.

在闭区间 $[-1,1]$ 上，函数 $y=(t-1)^2+2$，当 $t=-1$ 时，$|t-1|$ 取得最大值，最大值为 6.

由 $t=\sin x=-1$，得 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，这就是说当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=(\sin x-1)^2+2$ 取得最大值 6.

在闭区间 $[-1,1]$ 上，当 $t=1$ 时，$|t-1|$ 最小，函数 $y=(t-1)^2+2$ 取得最小值，最小值为 2.

由 $t=\sin x=1$，得 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，这就是说当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=(\sin x-1)^2+2$ 取得最小值 2.

（2）设 $t=\sin x$，因为 $-1\leq\sin x\leq 1$，所以 $t\in[-1,1]$，则 $y=-\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x+\frac{5}{4}$

$=-(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+2=-(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+2$，$t\in[-1,1]$ 所以当 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ 或 $2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$y_{\max}=2$；

当 $t=-1$，即 $\sin x=-1$，即 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 时，

$y_{\min}=\frac{1}{4}-\sqrt{3}$.

所以函数 $y=-\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x+\frac{5}{4}$ 的最大值为 2，最小值为 $\frac{1}{4}-\sqrt{3}$.

点评：求二次函数在给定闭区间上的最值时，要注意对称轴与给定区间的关系，当对称轴在给定的区间内时，在对称轴处取一最值，在离对称轴较远的端点处取另一最值；当对称轴不在给定的闭区间内时，在区间的两个端点处取得最值.

四.函数与方程的思想

例 5.设函数 $f(x)=\sin(\frac{k}{5}x+\frac{\pi}{3})(k\neq 0)$.

(1)写出 $f(x)$ 的最大值 M，最小值 m 和最小正周期 T；

(2)试求最小的正整数 k，使得当自变量 x 在任何两个整数间（包括整数本身）变化时，函数 $f(x)$ 至少有一个值是 m.

解析：(1) 把 $\frac{k}{5}x+\frac{\pi}{3}$ 看成一个变量 t，有函数 $f(x)=\sin(\frac{k}{5}x+\frac{\pi}{3})$ 的最大值和最小就是函数 $y=\sin t$ 的最大值和最小值. $M=1$，$m=-1$，最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\frac{k}{5}|}=\frac{10\pi}{|k|}$.

(2) 要使函数 $f(x)$ 在任意两个整数间至少有一个值是 M 与一个值是 m，而函数 $f(x)$ 在一个周期区间内有一个值是 M 和一个值是 m，故知函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T\leq 1$，即 $\frac{10\pi}{|k|}\leq 1\Rightarrow |k|\geq 10\pi$，故取 k 的最小整数为 $k=32$.

点评:（1）令 $t=\frac{k}{5}x+\frac{\pi}{3}$，将函数 $f(x)=\sin(\frac{k}{5}x+\frac{\pi}{3})(k\neq 0)$ 的问题转化为 $y=\sin t$ 的问题，这是整体数学思想的运用.（2）自变量 x 在任意两个整数间的（包括整数本身）变化，因此可以去极端情况，即 x 在两个连续整数间变化，这时区间长度为 1.