

基于数学元认知体验合理调控解题思路

◆王健发

(广东省惠州市华罗庚中学)

摘要: 学生解题思维的提升需要学生主动参与到解题过程中, 老师要建立, 引导, 培养好的学习氛围, 让学生产生深刻的数学元认知体验, 激发学生强烈的解题欲望, 进一步合理调控解题思路。

关键词: 数学元认知; 解题思路; 合理调控

数学元认知体验是数学元认知的成分之一, 数学元认知还包括数学元认知知识和数学元认知监控, 三者之间相互作用构成一个有机整体, 无论是教学效率的提高还是学生解题思维的提升都发挥重要的作用。数学元认知知识是解题思维的起点, 元认知体验是元认知知识和元认知监控之间的桥梁, 元认知监控调节思维的走向并起着优化元认知知识和强化元认知体验。尤其是数学元认知体验可以激活相关的数学元认知知识同时又为数学元认知调节活动提供必要的信息, 如果没有对当前的认知有深刻的体验, 那么数学解题活动是很难衔接起来的, 解题也就缺少了方向和针对性。

一、正确愉快的元认知体验优化解题思路

例 1: 已知三个方程 $x^2 - mx + 9 = 0$, $x^2 - 2(m-1)x + 25 = 0$, $x^2 + 2mx + 3m + 10 = 0$, 中至少有一个方程有实根, 求实数 m 的取值范围。

法 1: $\Delta_1 = m^2 - 4 \times 9 \geq 0 \Rightarrow m \leq -6$ 或 $m \geq 6$ ①

或 $\Delta_2 = 4(m-1)^2 - 4 \times 25 \geq 0 \Rightarrow m \leq -4$ 或 $m \geq 6$ ②

或 $\Delta_3 = 4m^2 - 4(3m+10) \geq 0 \Rightarrow m \leq -2$ 或 $m \geq 5$ ③

学生对至少有一个方程有实根分成 7 种情况进行讨论, 最后取交集可得实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$ 。

显然大家都觉得方法 1 的讨论有些复杂, 请同学们思考还有没有其他方法呢?

法 2: 从对立面进行考虑再求补集

$$\begin{cases} \Delta_1 = m^2 - 4 \times 9 < 0, \\ \Delta_2 = 4(m-1)^2 - 4 \times 25 < 0, \\ \Delta_3 = 4m^2 - 4(3m+10) < 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -6 < m < 6, \\ -4 < m < 6, \\ -2 < m < 5, \end{cases} \quad \text{得} \quad -2 < m < 5$$

得三个方程至少有一个方程有实根时, 实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$ 。

分析: 方法 1 无疑是正确的(正确的元认知体验), 老师给予赞扬之后学生又获得了愉快的数学元认知体验(愉快的元认知体验), 进一步提示学生还可以将解题方法进行优化, 学生的解题欲被调动起来, 自然会去思考其他解法。解法 2 的同学对此题做进一步深入的分析, 选择正难则反, 从而优化了本题的解法。

二、错误失望的元认知体验纠正解题思路

例 2: 设 $f(x) = ax^2 + bx$, $1 \leq f(-1) \leq 2$, $2 \leq f(1) \leq 4$, 求 $f(-2)$ 的取值范围。

法 1: $\because 1 \leq f(-1) \leq 2, 2 \leq f(1) \leq 4$, 而 $f(-1) = a - b, f(1) = a + b$,

$$\therefore 1 \leq a - b \leq 2, ① \quad 2 \leq a + b \leq 4, ②, \quad ①+② \text{得: } \frac{3}{2} \leq a \leq 3,$$

① $\times (-1) + ②$ 得, $0 \leq b \leq \frac{3}{2}$, 又 $\because f(-2) = 4a - 2b$, $\therefore 3 \leq 4a - 2b \leq 12$, 即 $3 \leq f(-2) \leq 12$ 。

同学们请思考一下, 本题还有其他解法吗?

法 2: $\because f(1) = a + b, f(-1) = a - b, \therefore$

$$a = \frac{f(-1) + f(1)}{2}, b = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$$

$$\therefore f(-2) = 4a - 2b = 3f(-1) + f(1), \therefore 5 \leq f(-2) \leq 10.$$

三、受阻焦虑的体验调整解题思路

例 3: 如图扇形 AOB 的半径为 1, 中心角为 $\frac{\pi}{3}$, $PQRS$ 是扇形的内接矩形, 问 P 在怎样的位置时, 矩形 $PQRS$ 面积最大, 最大值是多少? 在讲评此题时, 我认真听取了完成此题学生的解题思路 and 没有完成此题学生思路受阻情况。

没有完成此题几位同学的情况, 他们的解题过程如下:

$$\text{设 } PS = x, \text{ 则 } OS = \sqrt{1-x^2}, \quad OR = \frac{x}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}x,$$

$$RS = \sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}x, \text{ 所以 } S_{PQRS} = (\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}x)x, \text{ 做到这里,}$$

学生再也做不下去了, 最后就放弃了(思路受阻产生焦虑)。

深入分析思路受阻的原因是在选择变量时以边为变量, 因此我提示学生能不能不以边为变量, 而改成其他元素为变量, 请大家再去试试(调整解题思路)。几分钟之后一位同学说, 点 P 在弧 AB 上动时, 半径 OP 在做旋转, 而伴随着矩形的长和宽在变化, 显然与角度有关, 因此我选择了角度做变量, 他的解题过程检录如下:

解: 设 $\angle POS = \alpha, \alpha \in (0, \frac{\pi}{3})$, 则 $PS = \sin \alpha, OS = \cos \alpha$, 在

三角形 OQR 中, $\tan 60^\circ = \frac{OR}{OR} = \frac{\sin \alpha}{OR}$, 所以

$$OR = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha, RS = OS - OR = \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha,$$

$$\text{所以 } S_{PQRS} = PS \times RS = (\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha) \sin \alpha =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) - \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

显然, 当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时, 面积最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 。

接着我又让思路受阻的同学做个反思。反思的结果是: 在三角函数这章的学习中, 不够认真, 知识学的不够扎实, 对知识的理解不够深入, 对典型例题和习题也没做认真的总结、归纳及反思(元认知知识不够), 因此见到题还是像以往那样做而忽视了三角函数的工具作用, 遇到困难时没有管理好自己的情趣(元认知体验缺乏)。最后我鼓励他们说: “希望他们能在不断的反思中取得长足的进步”, 增强元认知体验。

总之, 数学教学除了教会学生合理的选择解题思路去解决一些数学问题, 更应该在数学元认知体验处下工夫, 通过各种渠道增强认知体验, 只有这样学生才会调动数学思维的批判性、深刻性、创造性、灵活性、广阔性去合理选择解题方法并对思路进行调控。

参考文献:

- [1] 罗增儒. 数学解题学引论. 陕西师范大学出版社, 2008 年 9 月第 2 版.
- [2] 董奇. 论元认知[J]. 北京师范大学学报, 1989(1)
- [3] 杨卓. 培养数学元认知体验提高学习兴趣[J]. 江苏教育研究, 2012(14): 51-52.
- [4] 李思广等. 论元认知水平对数学学习的影响[J]. 中州大学学报, 2000(12): 92-93.