用三个公式全面、完整地解决欧德斯猜想

◆李君池

（安徽省地矿局 327 地质队　230011）

摘要：数学家保罗•埃德斯与恩斯特•斯特劳斯于 1948 年共同提出了一个数学猜想:对于所有 n>1，方程 4/n=1/x+1/y+1/z 都有正整数解。自欧德斯猜想诞生以来，吸引了无数的数学家和数学爱好者进行了大量的探讨与研究，但七十年多过去了，一直没有什么大的进展，成了一道看似简单却又很棘手的世界难题。本文用三个公式全面、完整地解决了欧德斯猜想。文章的结论是：欧德斯猜想是一个正确的猜想。

关键词：欧德斯猜想；负余数；分数拆分试除公式；d 值递增法；分数拆分试除法；超然数；添加未知数公式；递增综合公式；猜想正确

0.引言。

匈牙利数学家保罗•埃德斯与德裔美国数学家恩斯特•斯特劳斯于 1948 年共同提出的数论猜想:对于所有 n>1，方程 4/n=1/x+1/y+1/z 都有正整数解。在欧德斯猜想诞生之后，有的数学家证明了，关于方程的简易恒等式 4/(3x+2)=1/(x+1)+1/(3x+2)+1/(x+1)(3x+2)勾股数组的代数形式表示方程中的 n,x,y,z，n=a/k，x=(c+a−b)/(4k−1)，y=(c+a+b)/(4k−1)，z=a 其中 k 为正整数，a,b,c 为一组勾股数，且满足 k 整除 a，4k−1 整除 b，4k−1 整除 c+a。现已证明，除了 n 同余于 1^2,11^2,13^2,17^2,19^2,23^2 mod840 之外，此猜想皆成立。那么，为什么会出现这种“除外”的情况呢？谁也不知道，而且，谁也没有找到其它另外的解答方法。因而，它成了至今未能解决的世界难题之一。

Stralss 进一步猜想，当 n⩾2 时，方程的解 x，y，z 满足 x≠y，y≠z，z≠x。X<y<z。1963 年，我国的柯召，孙奇，张先觉证明了 Erods 猜想与 stralss 猜想等价。几年后 yamanot 又把结果发展到 10 的 7 次方。以后一些数学家又把结果推向前去，但还是未获根本性的解决。

很快，几十年又过去了，随着科学技术的飞速发展，人们运用大型计算机，做了更多的努力，但让人感到无可奈何的是：当 n=2521 时，欧德斯猜想仍然找不到其解。

这个 2521 难住了许许多多的数学家，谁也不知道这到底是怎么了。例如，《从单位分数到欧德斯猜想》一文中就提出了如下的观点：首先，没有找到不等于没有解，因为你没有穷尽所有数值；其次，你必须注明 2521 没有解；第三，如果 2521 没有解，那么，这将是非常“可怕”的事情，因为它将要否定丢番图方程定理：AX+BY=1,(A,B)=1，必然有整数解。（见“新浪爱问共享资料”）。但是本文发现：这个 2521 是有解的，其解为：4/2521 = 1/638+1/55462+1/804199。下面，本文将从最简单的偶数入手来解决欧德斯猜想。

1.当 n 时偶数时。

在没有解题之前，先给大家介绍一下负余数的概念：

名词 1：负余数。当我们把一个整数除法的商扩大时，就会出现“负余数”。如：15÷4=3... 3=4... −1=5...−5=......。负余数的核心就是在扩大了商时被除数会不够除，被除数差的部分用余数负的部分来填补，所以商增加 1，负余数的负值就增加一个除数的大小。

下面求解，当 n 是偶数时，有：$\frac{4}{n}=\frac{2}{n}+\frac{2}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$.，此时 y=z，为了使 x,y,z 各不相同，设 w=n= $y'=z'$，令：$y'\div 2=y......-d$,则 $y=\frac{y'+d}{2}$,若 y' 为奇数时，取 d=1，若 y' 为偶数时，取 d=2，于是：

$$\frac{2}{w}-\frac{1}{y}=\frac{2y-w}{wy}=\frac{2\times\frac{y'+d}{2}-w}{wy}=\frac{y'+d-w}{wy}=\frac{d}{wy}=\frac{1}{z}.$$

代入公式中，则有：

$$\frac{4}{n}=\frac{2}{n}+\frac{1}{\frac{n+d}{2}}+\frac{2d}{n(n+d)}=\frac{1}{x}+\frac{2}{n+d}+\frac{2d}{n(n+d)}.$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

此时，x,y,z 各不相同。举例如下：

$$\frac{4}{102}=\frac{1}{51}+\frac{1}{102}+\frac{1}{102}=\frac{1}{51}+\frac{2}{102+2}+\frac{2\times 2}{102\times(102+2)}$$

$$=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{2652}.$$

这里，我们只是讨论了 n 是偶数时的情况，而负余数理论对于此后 n 是奇数时也是非常适用的，举例如下：

$$\frac{1}{17}+\frac{1}{17}=\frac{1}{\frac{17+1}{2}}+\frac{1}{17\times\frac{17+1}{2}}=\frac{1}{9}+\frac{1}{153}.$$

对于如何使 x, y, z 各不相同，我们还能想出更多种不同的解决方法，这里就不再一一叙述了。以上，我们解决了欧德斯猜想中的：“当 n⩾2 时，如何使方程的解 x，y，z 满足 x≠y，y≠z，z≠x”这一内容。有人可能认为，这一部分早已被人证明过了，然而，在实际中，遇到 x，y，z 有相同时，运用如此简单的方法来变换求解，为何弃之不用呢？

2.当 n 时奇数时。分别讨论如下：

当 n 能被 3 整除时，有：$\frac{4}{n}=\frac{1}{n}+\frac{3}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y'}$，令 $y=y'+d$，和 d=1，有：

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{y'}-\frac{1}{y}=\frac{1}{y'}-\frac{1}{y'+d}=\frac{y'+d-y'}{y'(y'+d)}=\frac{d}{y'(y'+d)}.$$

可得：

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{y'+d}+\frac{d}{y'(y'+d)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y'+1}+\frac{1}{y'(y'+1)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

此时，x,y,z 各不相同。举一例来说明：

$$\frac{4}{501}=\frac{1}{501}+\frac{1}{167+1}+\frac{1}{167\times(167+1)}=\frac{1}{501}+\frac{1}{168}+\frac{1}{28056}$$

还原如下：

$$\frac{1}{501}+\frac{1}{168}+\frac{1}{28056}=\frac{28056+83667+501}{501\times 28056}=\frac{112224}{14056056}=\frac{4}{501}$$

当 n 为被 3 除余数是−1 的奇数时，有：

设 n 为除以 3 余数是−1 的奇数，则：$\frac{4}{n}=\frac{1}{n}+\frac{3}{n}=\frac{1}{x}+\frac{3}{n}$.（此时 x=n）。现在 x 已经确定，下面就是如何拆分 $\frac{3}{n}$，使得 $\frac{3}{n}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 就可以了。由于 n 为被 3 除少 1 的奇数，我们把 n 加上 1，得 n' = n+1，这时 n' 就能被 3 整除了。此时，我们令 n' 与 3 的商为 y，即 $y=\frac{n'}{3}=\frac{n+1}{3}$，再由 $\frac{1}{z}=\frac{3}{n}-\frac{1}{y}$，得：

$$\frac{1}{z}=\frac{3y-n}{ny}=\frac{3\times\frac{n+1}{3}-n}{ny}=\frac{1}{ny}.$$

原方程可得：

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{n}+\frac{3}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{n\cdot\frac{n+1}{3}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

举例如下：

$$\frac{4}{3005}=\frac{1}{3005}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{3011010}=\frac{1002+3005+1}{3011010}=\frac{4}{3005}.$$

当n为被3除余数是+1的奇数时，我们把n分为被4除余数为−1和被4除余数为+1这两种情况来分别讨论。

A)“当n为被3除余数是+1，且被4除余数为−1”时：

我们以被4除为基准算式，那么，有：n÷4=c......−1，改写成没有余数的式子即为：C=(n+1)÷4，令x=c，有：

$$\frac{4}{n}-\frac{1}{x}=\frac{4}{n}-\frac{1}{\frac{n+1}{4}}=\frac{4n+4-4n}{n\times(n+1)}=\frac{4}{n\times(n+1)}=\frac{2}{n\times(n+1)}+$$

$$\frac{2}{n\times(n+1)}.\ \frac{4}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{4}}+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

此时，y=z,仿照第一节中介绍的方法，很容易使得y≠z。举例如下：$\frac{4}{67}=\frac{1}{17}+\frac{1}{2278}+\frac{1}{2278}=\frac{1}{17}+\frac{1}{1140}+\frac{1}{1298460}.$

B)当n为被3除余数是+1，且被4除余数为+1时：

这是欧德斯猜想中的难点。欧德斯猜想之所以是世界难题，正是人们难以全面解决此时的情况。下面予以证明：

在n ÷4=c⋯⋯+1中，我们将正余数改成负余数，并逐步增大负余数的值，即n÷4=c⋯⋯+1=c+1⋯⋯−(4×1−1)=c+2⋯⋯−(4×2−1)=⋯⋯=c+d......(4d−1)，(d=1,2,3,⋯⋯。)。我们再把这个有着负余数的式子改为没有余数的式子，即（n+4d−1）÷4=c+d。现在，再确定x，令x=c+d，(注意：这里的x是一个变量，它随着d值的增大而增大。)那么，x与n的关系为：$x=\frac{n+4d-1}{4}$，据此，我们可以得到：

$$\frac{4}{n}-\frac{1}{x}=\frac{4x-n}{nx}=\frac{4\times\frac{n+4d-1}{4}-n}{nx}=\frac{4d-1}{nx}=\frac{4d-1}{n(c+d)}.$$

我们再设m为小于4d−1的整数，有：

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{4d-1}{nx}=\frac{1}{x}+\frac{4d-1}{n(c+d)}=\frac{1}{x}+\frac{4d-1-m}{n(c+d)}+\frac{m}{n(c+d)}.\cdots(1)$$

公式1：分数拆分试除公式：

当4d−1−m和m能同时整除nx时，有：

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{4d-1-m}{nx}+\frac{m}{nx}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.\ ......(2)$$ 。

式（2），我们称之为“分数拆分试除公式”。这个公式，是解决欧德斯猜想的核心公式，她和其它的公式结合起来，对于全面解决欧德斯猜想具有重要的意义。

由于此时的n是一个被3和4除都余+1的奇数,故n=12k+1，而在n ÷ 4=c⋯⋯−+1中，c=(n−1)/4=(12k+1−1)/4=3k（k=1,2,3,......）。我们连续不断地增大x的值，有：n÷4=c⋯⋯−+1=c+d⋯⋯−(4d−1) =x⋯⋯−(4d−1)。

此时的$x=\frac{n+4d-1}{4}$，以及x=c+d，c=3k，此时，我们从d=1开始来寻找

（1）式和（2）式的求解情况，把它代入（1）式，有：

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{4d-1-m}{n(c+d)}+\frac{m}{n(c+d)}=\frac{1}{x}+\frac{3-m}{n(3k+1)}+\frac{m}{n(3k+1)}.\ ......(3)$$

在（3）式中，当k为奇数时，3k+1则为偶数，令m=1,必然有：

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{3-m}{n(3k+1)}+\frac{m}{n(3k+1)}=\frac{1}{x}+\frac{2}{n(3k+1)}+\frac{1}{n(3k+1)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

举例如下：

$$\frac{4}{85}=\frac{1}{22}+\frac{2}{85\times22}+\frac{1}{85\times22}=\frac{1}{22}+\frac{1}{935}+\frac{1}{1870}.$$

至此，我们证明了当n=12k+1，c=3k，k为奇数时，原命题成立。

3.用分数拆分试除公式来求解当n=24k+1时的情况。

我们接着来证明“当n=12k+1，c=3k，k为偶数时”的情况，此时可以将公式（1）改为如下的形式：

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{c+d}+\frac{4d-1-m}{n(c+d)}+\frac{m}{n(c+d)}=\frac{1}{c+d}+\frac{4d-1-m}{n(3k+d)}+\frac{m}{n(3k+d)}.\ ......(4)$$

在（4）式中，n为奇数，3k为偶数，而当k为偶数时，还可以将n调整为n=24k+1（k=1,2,3,....）,其数值分别为：25,49,73,97，121,145，......。而当n确定之后，c的值也随之确定，此时，只需将相关数值代入（4）中就可以了。

我们先从n=25来计算，c=(25−1)÷4=6，代入上式中，d≠1，因为当d=1时原命题无解。继续增加d的值，取d=2,m=2,得：

$$\frac{4}{25}=\frac{1}{6+2}+\frac{4\times2-1-2}{25\times8}+\frac{2}{25\times8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{40}+\frac{1}{100}.$$

此时有解。接下来，当n=49时，c=12,取d=2,m=0,得：

$$\frac{4}{49}=\frac{1}{12+2}+\frac{4\times2-1}{49\times(12+2)}=\frac{1}{14}+\frac{1}{98}=\frac{1}{14}+\frac{1}{99}+\frac{1}{9702}.$$

当n=73时，c=18,取d=2,m=0,得：

$$\frac{4}{73}=\frac{1}{18+2}+\frac{4\times2-1-2}{73\times(18+2)}=\frac{1}{20}+\frac{1}{292}+\frac{1}{730}.$$

当n=97时，c=24,取d=3,m=9,得：

$$\frac{4}{97}=\frac{1}{28}+\frac{4\times4-1-14}{97\times28}+\frac{14}{97\times28}=\frac{1}{28}+\frac{1}{2716}+\frac{1}{194}.$$

当n=121时，c=30，对于本小题，现做一个详细的描述：先从d=2开始，逐步计算如下：d=2时，c=30+2=32，其4d−1=7=1+6=2+5=3+4，由于6不能被32整除，并且，后面的2和5,3和4都不能同时被32整除，因此d=2时无解；d=3时，c=30+3=33，其4d−1=11=1+10=2+9=3+8=4+7=5+6，由于11能被33整除，试商此时就可结束。有：

$$\frac{4}{121}=\frac{1}{30+3}+\frac{4\times3-1}{121\times(30+3)}=\frac{1}{33}+\frac{1}{363}=\frac{1}{33}+\frac{1}{364}+\frac{1}{132132}.$$

在以上的解题中，我们同时运用了“d值递增法”和“分数拆分试除法”。现综述如下：

名词2：d值递增法。所谓d值递增法就是：在$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$的求解过程中，当n确定之后，n÷4=c+d⋯⋯−(4d+p)，如果我们分别取d=1，2，3，⋯⋯。使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{c+d}+\frac{4d-1-m}{n(c+d)}+\frac{m}{n(c+d)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$成立，这一逐步增加

d 取值求解的方法，我们称之为 d 值递增法。

从以上可以看到，对公式求解，除了要用到 d 值递增法之外，还要运用到“分数拆分试除法”。

名词 3. 分数拆分试除法：在 $\frac{4d-1-m}{n(c+d)}+\frac{m}{n(c+d)}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. 中，根据 d 值递增法，当 d 确定之后，第一个分式中的分子和第二个分式中的分子必须同时能够被各自的分母整除，并且都能够得到单位分数（即分子均为 1），只有在同时整除的情况下，n 才会有解。由于第一个分式的分子和第二个分式中的分子相互是一种“拆分”关系，所以，在求解 y 和 z 时，拆分就成了必然所在。令 f=4d-1，当 d=1 时，f=3=1+2；d=2 时，f=7=1+6=2+5=3+4；d=3 时，f=11=1+10=2+9=3+8=4+7=5+6；......。

我们将分子中的一个数 f 拆分成两个数，分别和分母进行试除求解，称之为分数拆分试除法，或拆分试除法。如果说 d 值递增法是解题的技巧，而拆分试除法则是解题的关键。

和本文引言中的“勾股数法”一样，运用 d 值递增法和拆分试除法，我们几乎可以得到所有 24k+1 类自然数 n 的答案，但是，当 d 的取值小于 3n 时，总有一些“漏网之鱼”，会出现一些无解的现象。现列表如下。对于有着一题多解的 n，表中只选用了其中的一种：

n	d	m	x	y	z
145	2	2	38	1102	2755
169	4	2	46	598	3887
193	2	2	50	1930	4825
217	2	0	56	1737	3015432
...	...	...	...	...	...
361	5	0	95	1806	3259830
385	2	0	98	5391	29057490
409	无解	无解	无解	无解	无解
433	2	2	110	99526	23815
...	...	...	...	...	...
529	6	0	138	3175	10077450
553	2	0	140	11061	122334660
577	无解	无解	无解	无解	无解
601	4	1	154	6611	92554
...	...	...	...	...	...
2473	2	2	620	306652	766630
2497	3	0	627	142330	20257686570
2521	**8**	**2**	**638**	**55462**	**804199**
2545	5	5	640	162880	325760
...	...	...	...	...	...
5521	6	1	1386	347823	7652106
5545	4	1	1390	770755	1541510
5569	无解	无解	无解	无解	无解
5593	2	0	1400	1118601	357853640
...	...	...	...	...	...

从表中可以看到：当 n=2521 时，显然是有解的。所以，运用整数拆分试除法恰好可以补充解决“勾股数法”无法解决的难题，使得所有的自然数都是有解的，由此，我们说：欧德斯猜想是正确的。现在的问题是：由于勾股数法遗留的是 2521 这一类自然数，如果分数拆分试除公式无法弥补某一更大的自然数呢？必须要找到更好的求解公式。

4. 找出更多的公式来对欧德斯猜想求解。

在上一节中，我们运用拆分试除法求解最后的 n=24k+1 这一类自然数时，在解答的过程中，当 d 的取值小于 3n 时，发现了这样的一组数：即当 N=409、577、5569，以及此后的 9601、23929、83449、102001、167281 等自然数时，原方程却是无解的。它们不受拆分试除公式的“约束”，出现了一些“无解的”自然数。我们将这些自然数称之为“超然数”。这些超然数，它们都是素数，可以组成一个“崭新的素数数列”。然而，超然数并不“超然”，运用勾股数法，我们很容易就能求出超然数的解来。但仅仅依靠这两个公式“搭档”，并不能保证对于所有自然数欧德斯猜想都有解。为此，我们又找到了如下两个公式：

公式 2：添加未知数公式：

设 n=24k+1 的自然数，c=(n-1)÷4，当 n 确定之后，c 也随之确定。根据拆分试除公式，随着 d 值的增加，总能得到“有限多个”x=c+d 的值为合数，设 x=c+d= $s_1\times s_2$, y= $s_1\times s_3$, z= $n\times s_1\times s_2\times s_3$.

若原方程有解，则必然有：

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{s_1\times s_3.}+\frac{1}{n\times s_1\times s_2\times s_3.}=\frac{1}{x}+\frac{ns_2+1}{n\times s_1\times s_2\times s_3.}=\frac{1}{x}+\frac{4d-1}{nx}. \quad ......(5)$$

现在我们来解这个等式的后半部分，有：

$$\frac{ns_2+1}{n\times s_1\times s_2\times s_3.}=\frac{4d-1}{nx}\Leftrightarrow\frac{ns_2+1}{s_3}=\frac{4d-1}{1}\Leftrightarrow s_3=\frac{ns_2+1}{4d-1}. \quad ......(6)$$

我们将⑤、⑥这两个公式联合起来称之为：添加未知数公式。这个公式可以帮助我们解决拆分试除公式中留下的问题。下面，对于那些“超然数”，用添加未知数公式来求解：

当 ns_2+1 能被 $4d-1$ 整除时，s_3 为整数，由此可以找到公式⑤和⑥的解。由于 4d-1=3, 7, 11, 15, 19, 23, . . . 。在 ns_2+1 中，s_2 不为定值，而是可以为大于 2 的任意自然数，即 s_2 =2, 3, 4, 5, 6, . . . 。那么，ns_2+1 中就有可能存在有多个能够被 3, 7, 11, 15, 19, 23, . . . 。整除的自然数。

当 n=409 时，c=102，取 d=2，4d-1=7，则 x=102+2=104=52×2，此时，s_3 =(409×2+1)÷7=117，由此得到，y=52×117=6084，z=409×52×2×117=4976712，还原如下：

$$\frac{4}{409}=\frac{1}{52\times2}+\frac{1}{52\times117}+\frac{1}{409\times52\times2\times117}=\frac{409\times117+409\times2+1}{409\times52\times2\times117}=\frac{4}{409}.$$

当 n=409 时，c=102，取 d=3，4d-1=11，则 x=102+3=105=21×5，此时，s_3 =（409×5+1）÷11=186，由此得到，y=21×186=3906，z=409×21×5×186=7987770，还原如下：

$$\frac{4}{409}=\frac{1}{21\times5}+\frac{1}{21\times186}+\frac{1}{409\times21\times5\times186}=\frac{409\times186+409\times5+1}{409\times21\times5\times186}=\frac{4}{409}$$

（3）当 n=409 时，取 d=8，4d-1=31，则 x=102+8=110=22×5，此时，s_3 =（409×5+1）÷31=66，由此得到，y=22×66=1452，z=409×22×5×66=2969340，还原如下：

$$\frac{4}{409}=\frac{1}{22\times5}+\frac{1}{22\times66}+\frac{1}{409\times22\times5\times66}=\frac{409\times66+409\times5+1}{409\times22\times5\times66}=\frac{4}{409}$$

（4）继续举 409 的例子，当 n=409 时，取 d=16，4d-1=63，则 x=102+16=118=59×2，此时，s_3 =（409×2+1）÷63=13，由此得到，y=59×13=767，z=409×59×2×13=627406，还原如下：

$$\frac{4}{409}=\frac{1}{59\times2}+\frac{1}{59\times13}+\frac{1}{409\times59\times2\times13}=\frac{409\times13+409\times2+1}{409\times59\times2\times13}=\frac{4}{409}$$

运用添加未知数法，还可以举出更多的（非常多的）关于

409 有解的情况。超然数居然有这么多组的解，真是大大出乎人的意料之外。然而，对于欧德斯猜想来说，一个自然数只要有一组解就可以了。

（5）当 n=577 时，c=144，取 d=1，4d-1=3，则 x=144+1=145=29×5，此时，s_3=（577×5+1）÷3=962，此时，y=29×962=27898，z=577×29×5×962=80485730，还原如下：

$$\frac{4}{577}=\frac{1}{29\times5}+\frac{1}{29\times962}+\frac{1}{577\times29\times5\times962}=\frac{577\times962+577\times5+1}{577\times29\times5\times962}=\frac{4}{577}$$

（6）当 n=5569 时，c=1392，取 d=2，4d-1=7，则 x=1392+2=1394=17×82，此时，s_3=（5569×82+1）÷7=65237，此时，y=17×65237=1109029，z=5569×17×82×65237=506446965082，还原如下：

$$\frac{4}{5569}=\frac{1}{17\times82}+\frac{1}{17\times65237}+\frac{1}{5569\times17\times82\times65237}$$
$$=\frac{5569\times65237+5569\times82+1}{5569\times17\times82\times65237}=\frac{4}{5569}.$$

利用这个公式，还可以求出更多的用拆分试除法无解的超然数的解来，甚至，每一个“超然数”我们都可以求出“一题多解”来。添加未知数公式的本质，其实是一个综合性的公式。由此，它使我们开拓了视野。很快，在公式 2 的基础上，我们又有了新的解题公式：

公式 3：递增综合公式：

负余数理论，在求解欧德斯猜想的过程中，起到了非常重要的作用。如果把这一理论再进行拓展，就可以得到彻底解决欧德斯猜想的综合公式。这里，给大家介绍的是：递增综合公式。

设 n=24k+1 的自然数，当 n 确定之后，设 x=n+s_1，结合拆分试除公式，有：

$$\frac{4}{n}-\frac{1}{x}=\frac{4x-n}{nx}=\frac{3x+s}{nx}=\frac{4d-1}{nx}\Leftrightarrow d=\frac{3x+s+1}{4}\Leftrightarrow s=4d-1-3x.$$

仿照前面的拆分试除公式，将以上公式整理为：

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{n+s}+\frac{4d-1-m}{n(n+s)}+\frac{m}{n(n+s)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

有时，为了计算的需要，我们常常需要对 y 和 z 进行配方，即分子和分母同乘以一个参数 s_2，则公式变形为：

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{n+s_1}+\frac{(4d-1)\times s_2-m}{n(n+s_1)\times s_2}+\frac{m}{n(n+s_1)\times s_2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.\ \ldots\ldots(7)$$

（7）式，我们称之为：递增综合公式。下面，就运用这个公式来求解，先从最小数开始：

当 n=25 时，取 s_1=25，此时，d=44，有：

$$\frac{4}{25}=\frac{1}{25+25}+\frac{4\times44-1-50}{25\times50}+\frac{50}{25\times50}=\frac{1}{50}+\frac{1}{10}+\frac{1}{25}.$$

但在很多情况下，在运用公式解题时，还有一个增加参数，综合调整的情况。例如：

当 n=49 时，取 s_1=50，s_2=2，此时，d=87，有：

$$\frac{4}{49}=\frac{1}{49+50}+\frac{(4\times87-1)\times2}{49\times99\times2}=\frac{1}{99}+\frac{694-1}{9702}+\frac{1}{9702}=\frac{1}{99}+\frac{1}{14}+\frac{1}{9702}.$$

当 n=73 时，取 s_1=219，s_2=5，此时，d=274，有：

$$\frac{4}{73}=\frac{1}{73+219}+\frac{(4\times274-1)\times5}{73\times292\times5}=\frac{1}{292}+\frac{5475-146}{106580}+\frac{1}{9702}=\frac{1}{292}+\frac{1}{20}+\frac{1}{730}.$$

当 n=409 时，取 s_1=5675，s_2=2，此时，d=5982，有：

$$\frac{4}{409}=\frac{1}{409+5675}+\frac{(4\times5982-1)\times2-1}{409\times6084\times2}+\frac{1}{409\times6084\times2}$$
$$=\frac{1}{6084}+\frac{1}{104}+\frac{1}{4976712}.$$

当 n=2521 时，取 s_1=52941，s_2=29，此时，d=219327，有：

$$\frac{4}{2521}=\frac{1}{2521+52941}+\frac{(4\times219327-1)\times29-5042}{2521\times55642\times29}+\frac{5042}{2521\times55642\times29}$$
$$=\frac{1}{55462}+\frac{1}{638}+\frac{1}{804199}.$$

运用此种方法解答欧德斯猜想，用人工计算，稍微麻烦一些，但用电脑解题，把公式输入就可以了。由于这种方法可以一个不漏地全面解决所有的自然数问题，因此，我们再也不用担心会出现“2521”、“超然数”等这一类难以解决的问题了。

5.结论。

本文根据负余数的理论，首先解决了自然数中欧德斯猜想的偶数问题，然后，对自然数中的奇数分开讨论，用多种方法一步步各个击破。当我们运用“分数拆分试除公式”，解决了“勾股数法”中遗留的 2521 这一类自然数时，却又产生了“超然数”这一新的问题。如果我们用“勾股数公式”回过头来解答超然数的问题，当然也是可以的。但仅仅依靠这两个公式搭档，并不能保证完整、全面地解决欧德斯猜想，还必须要找到更好的、可以完整地解答欧德斯猜想的公式。通过努力，我们又找到了“添加未知数”和“递增综合”这两个综合性的公式。特别是“递增综合公式”，它可以一个不拉地、全面地帮助我们解决欧德斯猜想中所有的自然数问题。至此，我们运用三个公式，全面、完整地解决了欧德斯猜想。

我们的结论是：欧德斯猜想是一个正确的猜想。