浅谈圆的直径式方程在解题中的妙用

◆刘　俊

（成都市通锦中学校）

2019 年全国高考三卷将解析几何和导数题位置互换，解析几何首次以压轴题的身份出现。全国三卷在命题方式上严格按照考试大纲，重点考察数学的基本知识和基本技能，试题稳中求新，稳中求变，比较新颖。如“断臂维纳斯”，“一朵云”等看似新颖的题，其实在传递一个信息：回归课本，紧扣教材，将教材信息读懂读透并能做到知识迁移，方能以不变应万变。解析几何对学生来讲一直都是一个难点，无论是解题思路还是计算都存在问题。下面就以教材一道习题所传递信息来解决一类复杂的解析几何问题。

一、圆的直径式方程：

人教 A 版数学必修二 124 习题 4.1 第 5 题：

已知：圆上一条直径的端点分别是 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，求证：此圆的方程是 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$。

解题分析：设 M 是圆上任意一点，利用 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ 立即可以得到 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$。

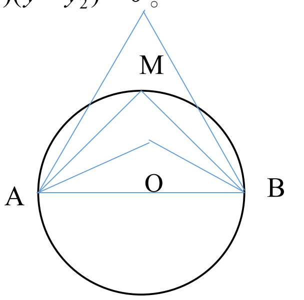
二、推广：

如图所示：

M 在圆 O 上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

M 在圆 O 内 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}<0$

M 在圆 O 外 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}>0$



三、应用：

（一）、利用直角关系求离心率及其范围

例 1、已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点为 F_1,F_2，满足 $PF_1\perp PF_2$ 的所有的点 P 都在椭圆内部，则椭圆离心率取值范围是

解：法（一）：

由题可知，以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆的短轴没有交点，所以 $c<b$，故易知 $e\in(0,\frac{\sqrt2}{2})$。

法（二）、利用短轴端点 C 在圆外，则 $\overrightarrow{CF_1}\cdot\overrightarrow{CF_2}>0\Rightarrow c<b$。故易知 $e\in(0,\frac{\sqrt2}{2})$。

变式练习：

已知 F_1,F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左右焦点，过 F_1 做垂直于 x 轴的直线交双曲线于 A,B 两点，若 ΔABF_2 为锐角三角形，则双曲线离心率范围是（　A　）

A、$(1,1+\sqrt2)$ B、$(1+\sqrt2,+\infty)$ C、$(1-\sqrt2,1+\sqrt2)$ D、$(\sqrt2,1+\sqrt2)$

法（一）利用锐角三角形易知 $\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}>0\Rightarrow e^4-6e^2+1<0$，

$\therefore 3-2\sqrt2<e^2<3+2\sqrt2\Rightarrow 1<e<\sqrt2+1$

法（二）由已知条件得：点 F_2 在以 AB 为直径的圆外，故寻找不等关系：$\frac{b^2}{a}<2c$，从而易得。

（二）、利用圆的直径端点式方程巧解答题，化繁为简

已知直线 $y=x-1$ 与抛物线 $y^2=2x$ 交于 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$ 两点，求以 MN 为直径的圆的方程。

解：由 $\begin{cases}y=x-1\\y^2=2x\end{cases}$ 得 $x^2-4x+1=(x-x_1)(x-x_2)=0$ ①

同理，消 x 得 $y^2-2y-2=(y-y_1)(y-y_2)=0$ ②

$\because M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$ 为圆的直径端点，设 $P(x,y)$ 为圆上任意一点，则满足

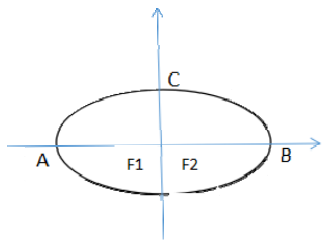
$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0\Rightarrow(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ ③ 为所求圆的方程。

将①②带入③得所求圆的方程为

$(x^2-4x+1)+(y^2-2y-2)=0$ 即 $(x-1)^2+(y-1)^2=6$

变式练习：（2018 年全国高中数学联赛（四川预赛）试题）

已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$，设其实轴端点为 A_1,A_2，点 P 是双曲线上不同于 A_1,A_2 的一个动点，直线 PA_1,PA_2 与分别与直线 $x=1$ 交于 M_1,M_2 点。



证明：以线段 M_1M_2 为直径的圆必经过定点。

证明：由已知可设 $A_1(-2,0),A_2(2,0)$，双曲线上动点 P 的坐标为 (x_0,y_0) 且 $y_0\neq0$ 则 $\frac{x_0^{\ 2}}{4}-\frac{y_0^{\ 2}}{3}=1$。

$\because$ 直线 PA_1 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，直线 PA_2 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)\ \therefore M_1(1,\frac{3y_0}{x_0+2})$，$M_2(1,\frac{-y_0}{x_0-2})$，设 $Q(x,y)$ 为以 M_1M_2 为直径的圆上任意一点，则由 $\overrightarrow{M_1Q}\cdot\overrightarrow{M_2Q}=0$ 得圆的方程为 $(x-1)(x-1)+(y-\frac{3y_0}{x_0+2})(y-\frac{-y_0}{x_0-2})=0$，令 $y=0$ 得 $(x-1)^2-\frac{3y_0^{\ 2}}{x_0^{\ 2}-4}=0$ 由 $\frac{x_0^{\ 2}}{4}-\frac{y_0^{\ 2}}{3}=1$ 可得 $\frac{y_0^{\ 2}}{x_0^{\ 2}-4}=\frac{3}{4}$，因此有 $(x-1)^2-\frac{9}{4}=0$，解得：$x=\frac{5}{2}$ 或 $x=\frac{1}{2}$ $\therefore$ 以线段 M_1M_2 为直径的圆必经过定点 $(-\frac{1}{2},0),(\frac{5}{2},0)$。

解析几何给人的感觉一直是难化解，计算量大，如果能够巧妙运用圆的直径式方程解题，不仅求解思路清晰，和谐，优美，而且解题过程简捷，明快，可收到事半功倍的效果，不失为一种好方法。