例谈职高数学“利用均值不等式求最值问题”的教学

◆肖千里

（四川省乐至县高级职业中学　641500）

摘要：随着国家对职业教育的重视，现在越来越多的学生也步入职业高中学习，他们对知识的学习也在更进一步，这对职业中学的数学课的教学也提出了更高的要求。为此，一堂课如何教学才能调动学生能主动、积极地参与到整个教学过程中来，成为当下职业教学的重点。尤其是职业学校学生数学基础差，底子薄，我们教师更应该采用多种方法来激发学生的积极性，提高教学效果。

关键词：职高数学；均值不等式；最值；变形

利用均值不等式 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$（ $a>0$，$b>0$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立）可以求解函数最值问题，是高中数学最普遍的一个问题。对于普通高中的学生来讲这部分知识是重点，稍加点拨就能理解，那么我们职高的学生对这一问题的理解肯定有一定的难度。职高的学生数学基础差，底子薄，由于大部分学生在意识上不能把课本知识与学习方法融为一体，他们总认为数学方法是解答数学问题时的一种固定法则，所以他们也就是死板地学习的时候居多，我为了改变学生的这种认识，就着重把对数学方法的思想与数学知识的教学溶入在讲课的过程中进行对比教学，促使他们从思想上自觉地发现知识、观察知识，尝试着去挖掘蕴涵于知识之中的数学方法。

我们知道“利用均值不等式求最值问题”主要的解答途径是：一是观察所求函数式是否具有“和、积”的形式；二是进行一步确定是否具备均值不等式的条件“正、定、等”；三是通过对所求函数式进行变形构造均值不等式的结构形式（“和或积”的形式），再利用其条件进行判断求值。

当然，第一步是关键，对于大部分学生来讲还是能够理解的。但对于职高的学生，我们要说明的不止直接可用定理解决的题型，而是我们不能直接运用均值不等式时，如何通过将解析式变形后再满足均值不等式的条件时的问题。下面我就“均值不等式的应用”在职高的教学中谈点自己的教学做法。

一、配凑

例 1、已知 $x>\frac{3}{2}$，求函数 $f(x)=2x-1+\frac{1}{2x-3}$ 的最小值。

解析：由题意知 $2x-3>0$，求“和”的最值问题。首先考虑“和”的“积”为定值，但 $(2x-1)\cdot\frac{1}{2x-3}$ 不是定值，由此可联想到 $(2x-3)\cdot\frac{1}{2x-3}=1$ 为定值。故需对 $2x-1$ 进行凑项变形为 $2x-3+2$，其中就有条件需要的了。所以，$f(x)=2x-1+\frac{1}{2x-3}=2x-3+\frac{1}{2x-3}+2$ $\ge2\sqrt{(2x-3)\cdot\frac{1}{2x-3}}+2=2+2=4$。最后“等”的条件也可得了：当且仅当 $(2x-3)=\frac{1}{2x-3}$，即 $x=2$ 时取等号，$f(x)=2x-1+\frac{1}{2x-3}$ 的最小值为 4。

例 2、若 $0<x<\frac{3}{2}$，求 $y=x(3-2x)$ 的最大值。

解析：由已知 $0<x<\frac{3}{2}$ 可知 $x>0,3-2x>0$ 满足了“正”；由结果知道求“积”的最值形式，就得考虑“和”为定值。但 $x+(3-2x)$ 不是定值，怎么办？构造，使 $x+(3-2x)$ 为定值。进而想到 $2x+(3-2x)=3$ 为定值，故只需将 $y=x(3-2x)$ 凑上一个系数即可，即 $y=x(3-2x)=\frac{1}{2}[2x\cdot(3-2x)]$ 这样就达到用“均值不等式”求最值的条件。于是有 $y=x(3-2x)=\frac{1}{2}[2x\cdot(3-2x)]\le\frac{1}{2}(\frac{2x+3-2x}{2})^2=\frac{9}{8}$。自然地“等”的条件也有了：当且仅当 $2x=3-2x$，即 $x=\frac{3}{4}$ 时取等号，$y=x(3-2x)$ 的最大值为 $\frac{9}{8}$。

例 3、若正数 x,y 满足 $x+2y=6$，求 xy 的最大值。

解析 1：由 $x>0,y>0$，利用均值不等式求最值，已知 $x+2y=6$ 即“和”为定值，但所求的“积”不是条件中的两个数 x 与 $2y$ 的积的形式，那么直接将目标式 xy 凑上一个系数可以吗？答案是肯定的，所以有

$xy=\frac{1}{2}\cdot x\cdot2y\le\frac{1}{2}(\frac{x+2y}{2})^2=\frac{1}{2}\cdot9=\frac{9}{2}$。自然地“等”的条件也有了：当且仅当 $x=2y=3$，即 $x=3,y=\frac{3}{2}$ 时取等号，xy 的最大值为 $\frac{9}{2}$。

二、消元

解析 2：由 $x+2y=6$ 得 $x=6-2y$，则 $xy=(6-2y)y=-2(y-3)^2+\frac{9}{2}$，其中 $(y>0)$。由 $y>0$，所以 xy 在 $y=3$ 时有最大值为 $\frac{9}{2}$。

那么，相关的这类问题是不是都可以一试呢？从而得到通过“消元”变化为含“一元”的二次函数的最值问题来解的方法。

例 4、已知 x>0,y>0，$2x+y=1$，求 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值。

解析 1：此类型题若直接用均值不等式的性质来解答，就将 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 乘以 1，而 1 用 $2x+y$ 代换。

$(\frac{1}{x}+\frac{2}{y})\cdot1=(\frac{1}{x}+\frac{2}{y})\cdot(2x+y)=2+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}+2=\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}+4$ $\ge2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+4=8$，当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}$ 时取等号，由 $\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}\\2x+y=1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$。$\therefore$ 当 $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$ 时，$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值为 8。

总之，我们在解决求最值问题时，需要我们进行分析后才能考虑用哪种方法，还要注意一些变形技巧，积极创造条件。其实，有些时候在我们都觉得很难的时候，我们是不是可以回归曾经学过的知识来解答呢？这正是我们让学生轻松学习的一个过程。因此我们要想撑握好学习数学的方法，只要我们多加观察灵活变通，我们是可以做到由繁到简的过程。