中值点存在性中辅助函数的构造

◆李远梅

（武警警官学院 数学与物理学系　四川成都）

摘要：针对中值点存在性问题，对辅助函数的构造进行了一种实质性的探索，求原函数的方法使学生更易理解掌握。

关键词：中值点；辅助函数；原函数

高等数学中有许多内容涉及到中值点的存在性问题，这既是高等数学教学中的一个重点也是一个难点。辅助函数的构造成为解决此问题的关键，特别是在利用中值定理证明各类含导数的等式及不等式中。本文就构造辅助函数的实质——寻找原函数，进行分析、举证说明。

一、分析

首先罗尔定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理中函数满足的前两个条件：闭区间上连续，开区间内可导都一样，结论都是至少存在一个中值点使得等式成立。唯一不同是条件三越来越弱。但拉格朗日中值定理，柯西中值定理结论可以通过移项变成与罗尔定理形式一样的结论，即等式左边是含导数的函数，右边为零。只需寻找使得罗尔定理条件三 $f(a)=f(b)$ 成立的辅助函数。又因为结论是 $f'(\xi)=0$。所以构造的辅助函数实质就是 $f(x)$，即结论中等式左边的式 $f'(\xi)$ 的原函数。

二、举例说明

例 1、设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'(\xi)+f''(\xi)=1$

证明：$f'(\xi)+f''(\xi)=1$，转化为 $f'(\xi)+f''(\xi)-1=0$，

则原函数为 $F(x)=f(x)+f'(x)-x$

因为 $f(x)$ 为奇函数 $f(-1)=-1$，则 $f'(x)$ 为偶函数，$f'(-1)=f'(1)$

所以 $F(1)=f(1)+f'(1)-1=f'(1)$

$F(-1)=f(-1)+f'(-1)+1=f'(-1)$

$F(1)=F(-1)$

由罗尔定理可证存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'(\xi)+f''(\xi)=1$

例 2、$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数且 $g''(x)\neq 0, f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$

证至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$。

证明：将 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$ 转化为 $f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$

则原函数为 $F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$

则 $F(a)=f(a)g'(a)-f'(a)g(a)=0$，

$F(b)=f(b)g'(b)-f'(b)g(b)=0$

由罗尔定理得至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$ 即 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

例 3、设 $a>0$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$

$af(b)-bf(a)=0$，证明在 (a,b) 内存在 ξ，使得 $\dfrac{f(\xi)}{f'(\xi)}=\xi$

证明：$\dfrac{f(\xi)}{f'(\xi)}=\xi$ 转化为 $f(\xi)-\xi f'(\xi)=0$，即 $\xi^{-2}(f(\xi)-\xi f'(\xi))=0$，原函数

$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，因为 $F(a)=\dfrac{f(a)}{a}$，$F(b)=\dfrac{f(b)}{b}$，由 $af(b)-bf(a)=0$ 得 $F(a)=F(b)$，在 (a,b) 内存在 ξ 使得 $\xi^{-2}(f(\xi)-\xi f'(\xi))=0$ 即 $\dfrac{f(\xi)}{f'(\xi)}=\xi$

例 4、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=a$，$\int_a^b f(x)dx=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$。

证明：将 $f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$ 转化为等式 $f'(\xi)+\xi-f(\xi)-1=0$

即 $e^{-\xi}(f'(\xi)+\xi-f(\xi)-1)=0$，则原函数为 $F(x)=e^{-x}f(x)-e^{-x}x$，

因为 $F(a)=e^{-a}f(a)-e^{-a}a=0$，因为 $\int_a^b f(x)dx=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$，则必存在点 $\eta, f(\eta)=\eta$

所以 $F(\eta)=e^{-\eta}f(\eta)-e^{-\eta}\eta=0$，由罗尔定理得至少存在一点 $\xi\in(a,\eta)$ 使得 $e^{-\xi}(f'(\xi)+\xi-f(\xi)-1)=0$，即 $f'(\xi)+\xi-f(\xi)-1=0$，$f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$

例 5、设 $a>0$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$。

证明：将 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$ 转化为 $af(\xi)-(b-\xi)f'(\xi)=0$，即 $[af(\xi)-(b-\xi)f'(\xi)](b-\xi)^{a-1}=0$，则原函数为 $F(x)=(b-x)^a f(x)$，因为 $F(b)=F(a)=0$，由罗尔定理可知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $[af(\xi)-(b-\xi)f'(\xi)](b-\xi)^{a-1}=0$，即 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

三、结论

通过上述例子发现构造辅助函数时，往往需要将结论经过等式变形才容易求得原函数。通常在不能直接求得原函数的情况下，需要将结论乘以 $e^{\alpha x}$ 或 $(ax+b)^{\alpha}$。为什么这样做的主要原因是指数函数的导数是其本身，幂函数的导数除常系数外就是降次。用求原函数的方法对解决此类含导数的中值点的存在性问题不失为一种简便，有效的方法。

参考文献：

[1]同济大学数学系.高等数学(上册)[M].7 版.北京：高等教育出版社，2014:68-242

[2]四川大学数学系.高等数学(第一册)[M].北京:高等教育出版社,1978:113-122

[3]徐森林,薛春花.数学分析(第一册)[M].北京:清华大学出版社,2005:185-197

[4]李心灿.大学生数学竞赛试题研究生入学数学考试难题解析选编[M].2 版.北京:高等教育出版社,2000:226-396

[5]西北工业大学高等数学教研室.高等数学专题分类指导[M].上海:同济大学出版社,1999:58-78

[6]陈兆斗,郑连存,王辉,等.大学生数学竞赛习题精讲[M].北京:清华大学出版社,2010:36-47

[7]徐利治.大学数学解题方法诠释[M].合肥:安徽教育出版社,1999:55-70

[8]胡适耕.大学解题艺术[M].长沙:湖南大学出版社,1999:296-302