关于导数与微分的教学方法的改进

◆李远梅

（武警警官学院基础部　四川成都）

摘要：针对求导数的方法的改进，用微商的方法求解复合函数、隐函数、参数方程的导数更简单，理论更易理解。

关键词：导数；微分；微商；参数方程

《高等数学》下册关于多元函数的复合函数求导以及隐函数求导都是放在多元函数全微分之后讲解的多元复合函数、隐函数和参数方程的导数。发现通过微分来讲解导数在逻辑上更让学生容易理解。那么在讲解一元函数的复合函数，隐函数、参数方程等是否也可以通过微分来讲解呢？

定义：函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 可微，记作 $dy=f'(x)dx$，因此函数的导数 $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ 也称为“微商”。

一、复合函数的求导法则

定理 1 如果 $u=g(x)$ 在点 x 可导，而 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导。那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导，其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

证明：由于 $dy=f'(u)du$，$du=g'(x)dx$

则 $dy=f'(u)g'(x)dx$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)$$

二、隐函数所确定的函数的导数

求方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dx}{dy}$

方法：将方程两边同时微分则 $e^y dy+ydx+xdy=0$

即 $(e^y+x)dy+ydx=0$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{e^y+x},\quad \frac{dx}{dy}=-\frac{e^y+x}{y}$$

用微分的方法可以不用考虑自变量问题，可以根据问题来求到底是 $\frac{dy}{dx}$ 还是 $\frac{dx}{dy}$。

三、参数方程所确定的函数的导数

定义参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，如果函数 $x=\varphi(t)$ 具有单调连续反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，且此反函数能与函数 $y=\psi(t)$ 构成复合函数 $y=\psi[\varphi^{-1}(t)]$，且 $\varphi'(t)\neq 0$，且 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 都可导利用复合函数与反函数求导法有 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

问题：在此定义中要求 $x=\varphi(t)$ 具有单调连续反函数，事实上我们不需要单调连续反函数这一条件。加此条件目的是想用复合函数和反函数求导，在教学中学生很难理解，我们可以从微分的角度直接得 $dy=\psi'(t)dt$，$dx=\varphi'(t)dt$，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

例 1 试从 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$ 求出 $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$

解 $\because\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}\ \therefore\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\frac{dx}{dy}}{dy}=\frac{d\frac{1}{y'}}{dy}$

又 $\because\ d\frac{1}{y'}=\frac{-y''}{(y')^2}dx$，$dy=y'dx$

$$\therefore\ \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

例 2 求由 $y=1-xe^y$ 方程所确定的隐函数的导数.

将方程两边求微分得 $dy=-e^y dx-xe^y dy$

即 $(1+xe^y)dy=-e^y dx$

则 $\frac{dy}{dx}=-\frac{e^y}{1+xe^y}$

例 3 求参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$

解：$\begin{cases}x=\frac{t^2}{2}\\ y=1-t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=tdt\\ dy=-dt\end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-t$

则 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d-t}{dx}=\frac{-dt}{tdt}=-\frac{1}{t}$

通过以上举例可以发现，用微商求解复合函数，隐函数，参数方程的导数更容易也更简单。我们在教学中不防可以先讲导数概念及性质，再讲初等函数的导数，而后微分，最后反函数、复合函数求导，隐函数求导，参数方程求导等。

参考文献：

[1]高等数学.第七版下册.同济大学数学系编.高等教育出版社 2014.7

[2]高等数学.第七版上册.同济大学数学系编.高等教育出版社 2014.7