

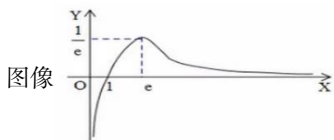
函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图像与性质及其应用

◆王建国

(江苏省徐州市第37中学 221000)

函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 有着丰富的性质,其图像特征显著。以其为原型或背景的函数应用题常出现在各地的高考及模拟试题中,熟练运用其图像及性质解题可使问题化繁为简,化难为易。

一、函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图像与性质



定义域 $(0, +\infty)$ 值域 $(-\infty, \frac{1}{e}]$

单调性 在 $(0, e)$ 上, 函数为单调增函数 在 $(e, +\infty)$ 上, 函数为单调减函数 有唯一零点 $x=1$

最大值与最小值 当 $x=e$ 时, 函数有最大值 $\frac{1}{e}$ 无最小值

渐近线 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 图像越来越趋近于 x 轴的正半轴; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 图像越来越趋近于 y 轴的负半轴。

二、函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图像与性质的应用

例1. (2005年全国高考试题)

若 $a = \frac{\ln 2}{2}$, $b = \frac{\ln 3}{3}$, $c = \frac{\ln 5}{5}$, 试比较 a, b, c 的大小。

解析: 构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 由函数 $y = f(x)$ 的图像及其性质可知, 在 $(e, +\infty)$ 上函数 $y = f(x)$ 为单调减函数,

而 $a = \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$, 且 $e < 3 < 4 < 5$, 所以, $\frac{\ln 3}{3} > \frac{\ln 4}{4} > \frac{\ln 5}{5}$, 即 $b > a > c$ 。

点评: 根据 a, b, c 三个数的结构特征构造新函数, 再利用新函数的单调性比较三个数的大小, 解法新颖, 简洁。

例2. 判断方程 $a^x = x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 根的个数。

解析: 因为 $a^x > 0$, 所以方程要有解, 则需 $x > 0$,

此时, 方程 $a^x = x$ 等价于 $x \ln a = \ln x$, 即 $\ln a = \frac{\ln x}{x}$ 。

问题转化为函数 $y = \ln a$ 与 $y = \frac{\ln x}{x}$ 图像公共点的个数。

由于 $a \neq 1$, 所以 $\ln a \neq 0$, 由函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的图像可知,

当 $\ln a < 0$ 即 $0 < a < 1$ 时, 两个函数图像有一个公共点, 即方程 $a^x = x$ 有一个实根。当 $0 < \ln a < \frac{1}{e}$, 即 $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ 时, 两个函数图像有二个公共点, 即方程 $a^x = x$ 有二个实根。当 $\ln a = \frac{1}{e}$, 即 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 时, 两个函数图像有一个公共点, 即方程 $a^x = x$ 有一个实根。当 $\ln a > \frac{1}{e}$, 即 $a > e^{\frac{1}{e}}$ 时, 两个函数图像没有公共点, 即方程 $a^x = x$ 无实根。

综上: (略)

点评: 此题将指数型方程化归为对数型方程, 从而将问题转化为函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的图像与直线的交点个数问题。结合它们的图像, 问题便迎刃而解。

例3. (2018年江苏南通模拟试题) 已知函数 $f(x) = a(x + \ln x) + 1$ ($a \neq 0$), $g(x) = x^2 + 1$, 若函数 $f(x)$ 的图像在 $x=1$ 处的切线恰好也是 $g(x)$ 图像的切线。

(1) 求 a 的值;

(2) 若函数 $h(x) = mx - f(x) + 1$ 在区间 $[\frac{1}{e}, +\infty)$ 内有二个零点 (e 为自然对数的底数), 求实数 m 的取值范围。

解析: (1) $f(1) = a + 1$, $f'(x) = a(1 + \frac{1}{x})$, $f'(1) = 2a$

所以 $f(x)$ 图像在 $x=1$ 处的切线方程为:

$y - (a + 1) = 2a(x - 1)$ 即 $y = 2ax - a + 1$

联立方程组 $\begin{cases} y = 2ax - a + 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2ax + a = 0$,

由题设, $\Delta = (-2a)^2 - 4a = 0$, 解得 $a = 1$ 。

(2) $h(x) = mx - f(x) + 1 = mx - x - \ln x$, $h(x)$ 在区间 $[\frac{1}{e}, +\infty)$ 内有二个零点, 等价于方程 $mx - x - \ln x = 0$ 在区间 $[\frac{1}{e}, +\infty)$ 内有二个相异的实根, 即方程 $m - 1 = \frac{\ln x}{x}$ 在区间 $[\frac{1}{e}, +\infty)$ 内有二个相异的实根。

由函数 $y = m - 1$ 及 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的图像及性质可得, $0 < m - 1 < \frac{1}{e}$ 即 $1 < m < \frac{1}{e} + 1$ 。所以, 实数 m 的取值范围为 $(1, 1 + \frac{1}{e})$ 。

点评: 函数 $f(x)$ 有零点与方程 $f(x) = 0$ 有实根及函数 $f(x)$ 图像与 x 轴有公共点为等价命题, 常相互转换, 解题时要注意灵活运用。

例4. (2013年江苏高考试题) 设函数 $f(x) = \ln x - ax$, $g(x) = e^x - ax$, 其中 a 为实数。(1) 若 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是单调减函数, 且 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有最小值, 求 a 的取值范围; (2) 若 $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上是单调增函数, 试求 $f(x)$ 的零点个数, 并证明你的结论。

解析: (1) 略。

(2) $g'(x) = e^x - a$, 因为 $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调增函数, 所以 $g'(x) \geq 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立, 即 $a \leq e^x$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立, 故 $a \leq \frac{1}{e}$ 。令 $f(x) = 0$, 则 $a = \frac{\ln x}{x}$ 。

所以函数 $f(x)$ 的零点个数即为函数 $y = a$ 与 $y = \frac{\ln x}{x}$ 图像公共点的个数。

由函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 图像及其性质可知: 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有一个零点; 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 有二个零点; 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 有一个零点;

综上所述: 当 $a \leq 0$ 或 $a = \frac{1}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 有一个零点;

当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 有二个零点。

点评: 此题结构简洁, 看起来很平常, 但有一定的难度和区分度, 如果分离参数 a , 利用函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的图像与性质解题, 会避免复杂的运算与讨论。