

二次函数中与动点相关的最值问题

◆王树宝

(湖南省娄底市新化县第十二中学)

摘要:初中函数学习时,动点相关问题在二次函数中是学生大多感觉较为困难的问题,怎样按照题目给出的信息,根据变化的动点特点,找到对问题进行解决的关键,达到化繁为简,获得问题巧妙的解决办法.本文针对初中二次函数中动点相关最大值问题进行分析探讨,给出实际案例进行说明,剖析对常见困难问题的分析思路,找出巧妙解决的关键所在,旨在为大家起到事半功倍触类旁通的作用.

关键词:初中;二次函数;动点;最值问题;分析

引言

二次函数含有字母系数的最值求解,一般遇常遇到的题目中函数求最值的系数是常数,但往往实际中考选题时会出现系数为系数的问题.需要在解答时进行讨论系数的取值问题,因为类似的题目颇有难度较为复杂,常会将很多学生在试卷中因此丢失.其实对这种题目基本的解决思路,可以将系数当作常数来思考,因为常数的二次函数是学生一般都较为熟悉的题型,再结合在自变量变化范围内顶点的不同变化位置,展开对函数分类的讨论,得出各种不同情况条件下的题目结论.

二次函数区间范围内最值的求解

初中数学函数学习时,二次函数最值在区间范围内类型的问题,在学生中普在普遍的难度,学生除了要对二次函数的性质熟练地掌握,同时函数解题时的应用技巧也需要具备.通常来说,对于一个二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$),当 $x=-\frac{b}{2a}$ 这种情况下解题过程比较简单,很容易求得它的最值为 $f(-\frac{b}{2a})$.而如果 x 的取值范围被限定了,当 $x=[a, b]$ 时,求解最值的方法就显得十分的困难.基于此,必须要针对性的分情况进行讨论,求解时要根据二次函数的性质和提供的图象来分析.

1.定轴定区间

函数的区间和对称轴均固定是指的为定轴定区间,求解种类题目时较为简单,一般结合函数图象分析就能判断最小或是最大值.

例 1:求函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值.

解析:二次函数的最值在闭区间上,也许会在闭区间的端点上出现,也可能在函数的顶点上出现.此二次函数的开口向上,有可能在两个顶点上或两个端点均取得.按照函数对称轴或是区间范围可以作出函数的草图,进行对草图的观察或获得最小值和最大值的位置.对称轴为 $x=1$ 是原方程式提供的信息,通过草图的观察分析出应在 $x=1$ 处取得最小值,即 $y_{\min}=-4$;而在 $x=-2$ 处取得最大值,即 $y_{\max}=5$.

2.定轴动区间

可以确定函数的对称轴是为定轴动区间,但其不确定的是闭区间,有变量区间内的函数存在.对称轴之间和函数的区间的相对位置关系是这类问题主要考查的.

例 2:求在区间 $[t, t+1]$ 上时, $y = -x^2 + 2x - 2$, 其最小值和最大值.

解析:与例 1 不同的是,这一例题是关于变量的函数区间,对称轴和区间端点值不能采取直接对应值大小的比较,具体的函数图象不能起草画出而供分析参考,无法直接进行问题的求解.需要在解题时分类讨论.最大、最小值的取值点按照对称轴和区间端点的距离关系来进行分析确定.

函数图象的对称轴根据原函数可知为 $x=1$.当在区间的左侧函数的对称轴时,即 $t+1 < 1$ 时, $y_{\max} = y(t+1) = -t^2 - 1$;当函数的对称轴在区间右侧时,即 $t \leq 1$ 时, $y_{\max} = y(1) = -1$;当在区间范围内的对称轴函数时,即 $t \leq 1 \leq t+1$ 时, $y_{\max} = y(1) = -1$.

3.定区间动轴

函数的区间固定即为定区间动轴,它是变化着的对称轴,这种情况下,需要讨论二次函数的最值.与定轴动区间有着相似的讨论情况.

例 3:求函数在区间 $[-1, 2]$ 上 $y=x^2+2ax+1$ 的最小值.

解析:该函数的对称轴根据函数方程可知 $x=-a$.当在区间的左侧函数的对称轴时,即 $-a < -1$ 时, $y_{\max}=y(-1)=-2a+2$;当在区间范围内的对称轴函数时,为 $-1 \leq -a \leq 2$ 时, $y_{\max}=y(2)=4a+5$.

4.轴定区间变问题

例 4:求在区间 $[t, t+2]$ 上时,二次函数 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 的值域.

分析:随着改变的区间位置,函数值域因为对称轴和区间的相对位置的变化影响显而易见.

①当位于区间的左侧的对称轴位置时,即 $t \geq 1$ 时,在区间 $[t, t+2]$ 上的函数 $f(x)$ 为增函数,此时取值 $f(x)$ 的范围为 $f(t) \leq f(x) \leq f(t+2)$;

②当位于左半区间的对称轴位置时,即 $t \leq 1 \leq t+1$ 时,在区间 $[t, t+2]$ 上的函数 $f(x)$ 变化是先减后增,距离对称轴右端点 $t+2$ 较远,此时取值 $f(x)$ 的范围为 $f(1) \leq f(x) \leq f(t+2)$;

③当位于右半区间的对称轴位置时,即 $t+1 \leq 1 \leq t+2$ 时,在区间 $[t, t+2]$ 上的函数 $f(x)$ 也是先减后增,此时距离对称轴是左端点 t 较远,因而是 $f(1) \leq f(x) \leq f(t)$ 的取值范围;

④当位于区间的右侧的对称轴时, $t+2 \leq 1$ 时,在区间 $[t, t+2]$ 上的函数 $f(x)$ 为减函数,此时取值 $f(x)$ 的范围是 $f(t+2) \leq f(x) \leq f(t)$.

有些学生很可能只会进行三种情况的讨论,而合并②③,这是求解思路是容易造出错的普遍原因.

结束语

总之,想要加强求解二次函数最值问题的练习,需要从不同角度对问题进行分析的探讨,综合培养学生思考问题的维度,促使学生能够分析出最快捷方便的解题技巧,从而帮助学生对于初中二次函数关于动点最值问题有更深入的理解和掌握.获得数学知识能力的有效提升.

参考文献:

- [1]中华人民共和国教育部制定.义务教育数学课程标准(2011年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2012.
- [2]罗增儒.数学解题学引论[M].西安:陕西师范大学出版社,2008.

