

相似三角形中的分类讨论

◆李文芳

(广州市东圃中学 广东广州 510660)

摘要: 分类讨论思想是一种常见的数学思想, 由于有些数学问题的题设或结论的不唯一确定, 使问题存在许多种可能情况, 因此要按可能出现的情况分别加以讨论。运用分类讨论的思想来解决相似三角形问题是近年来中考数学命题的热点。然而不少学生在学习之初, 对这类问题的图形识别能力很差而且分类混乱。

关键词: 相似三角形; 分类讨论; 基本图形

一、认识基本图形

相似三角形中的分类讨论问题中大多存在一对已确定的对应元素, 如一组对应点或一组对应角或一组对应边。因此, 将原本两个三角形相似有六种可能对应的情况缩减为两种可能。

例 1. 如图 1, D 为 AB 边上的一点, 点 E 为 AC 边上的点, 要使 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 你能作出几个符合条件的点 E ? 请画出图形。

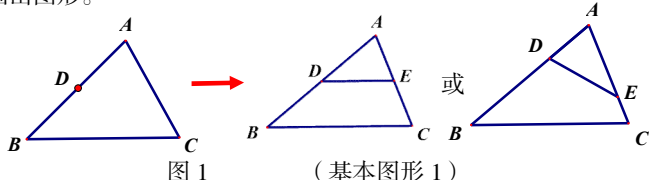


图 1 (基本图形 1)

例 2. 如图 2, $\triangle ABC$ 中, $AB=15$, $AC=12$. D 为 BA 延长线上的一点, 点 E 在 CA 的延长线上, 且 $AD=6$. 要使 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 求 AE 的长? 请画出图形再求解。

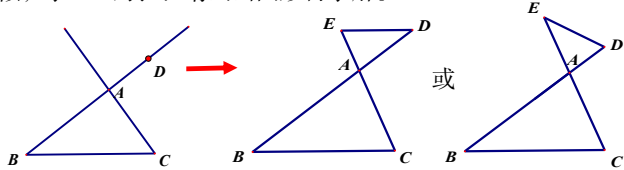


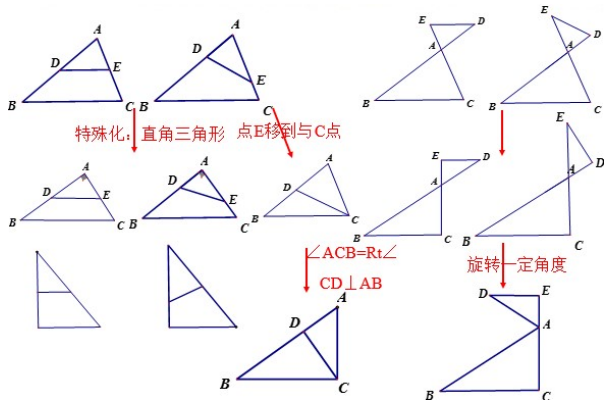
图 2 (基本图形 2)

分析: $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 有公共顶点 A , 有公共角 $\angle A$, 即对应顶点为 A 和 A , 对应角为 $\angle A$ 和 $\angle A$, 对应边自然为 BC 和 DE . 此时, 无论从点、角、边任何一个角度去考虑, 都有一组已确定的对应元素, 所以相似缩减为两种可能。

解法 1 根据“有两个角对应相等的两个三角形相似”可知要使 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 只要使 $\angle ADE = \angle B$, 即 $DE \parallel BC$, 或者 $\angle AED = \angle B$.

解法 2 根据“两边对应成比例且夹角相等的两三角形相似”可知, 要使 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 只要使 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ 或 $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$.

例 1、2 是分类讨论思想在三角形相似中的最简单的运用, 我们平时见到的很多问题都是基本图形的适当变形。



(基本图形的常见变形)

二、巩固应用

应用 1 点 P 是 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的一点, 过点 P 作直线(不与直线 AB 重合)截 $\triangle ABC$, 使截得的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 满足这样条件的直线最多有多少条?

分析 因为没有明确直线与 AC 边还是 BC 边相交, 所以先分两类讨论, 而这两类情况下又分别有两条直线符合题意, 故共有 4 条。

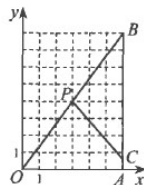


图 3

应用 2 已知 $Rt\triangle OAB$ 在直角坐标系中的位置如图 3 所示, $P(3, 4)$ 为 OB 的中点, 点 C 为折线 OAB 分割成两部分。问: 点 C 在什么位置时, 分割得到的三角形与 $Rt\triangle OAB$ 相似? (注: 在图上画出所有符合要求的线段 PC , 并求出相应的点 C 的坐标)

分析 不难看出应用 2 是应用 1 的变式。根据点 C 所在的不同, 先分两类讨论, 即点 C 在线段 OA 上与点 C 在线段 AB 上。

情况一: 当点 C 在线段 OA 上时, 分割得到的三角形是 $\triangle OPC$, 它与 $\triangle OAB$ 有公共角 $\angle AOB$, 根据“两边对应成比例且夹角相等的两三角形相似”可知, 要使 $\triangle OPC$ 与 $\triangle OAB$ 相似, 只要使 $\frac{OP}{OC} = \frac{OB}{OA}$ 或 $\frac{OP}{OC} = \frac{OA}{OB}$, 代入数据后, 可分别得到一个关于 OC 的方程

$$\frac{5}{OC} = \frac{10}{6} \text{ 或 } \frac{5}{OC} = \frac{6}{10}, \text{ 所以 } OC=3 \text{ 或 } OC=\frac{25}{3}.$$

因为 $\frac{25}{3} > OA=6$ 所以 $OC=\frac{25}{3}$ 应舍去。所以当点 C 在 OA 上时, 坐标为 $(3, 0)$ 。

情况二: 当点 C 在线段 AB 上时, 分割得到的三角形是 $\triangle BPC$, 它与 $\triangle OAB$ 有公共角 $\angle ABO$, 同理可知, 要使 $\triangle BPC$ 与 $\triangle OAB$ 相似, 只要使 $\frac{BP}{BC} = \frac{OB}{AB}$ 或 $\frac{BP}{BC} = \frac{AB}{OB}$. 代入相应数据后, 亦

可分别得到一个关于 BC 的方程 $\frac{5}{BC} = \frac{10}{8}$ 或 $\frac{5}{BC} = \frac{8}{10}$, 所以

$$BC=4 \text{ 或 } BC=\frac{25}{4}. \text{ 所以 } AC=4 \text{ 或 } AC=8-\frac{25}{4}=\frac{7}{4}, \text{ 所以当点 } C \text{ 在}$$

AB 上时, 坐标为 $(6, 4)$ 或 $(6, \frac{7}{4})$ 。

以上给出的解法是根据“两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似”, 通过构造方程找到边的长度, 从而确定坐标。但此题中 $\triangle OAB$ 是一个直角三角形, 所以当发现分割所得到的三角形与 $\triangle OAB$ 有公共角时, 也可根据“有两角对应相等的两三角形相似”, 分别过点 P 作 OA , AB , OB 的垂线来构造直角三角形, 在此直角坐标系中, 也能轻松得到答案。

用上述类似方法解答的相似三角形中的分类讨论问题还有很多, 有的还可以与双动点问题结合, 可以与抛物线相结合, 虽然嵌入的背景各不相同, 但分类方法基本相同。

参考文献:

[1] 用分类讨论法解相似三角形“截线”问题 · 魏从波 · 江苏省南京市金陵中学河西分校, 210019

[2] 分类讨论思想在相似三角形中应用 · 汤永东 · 浙江省象山县高塘学校 315734