高中数列易错题型评析

◆应淑美

（墨江县第一中学）

摘要：在高中数学数列模块的学习过程中，有几类题型学生的犯错率比较明显，对于提高教育教学质量有制约性。本文重点分析了易错题的题型种类，通过典型例题阐述易错原因，并提出解决措施，提高解题的正确率，望能对大家的教学工作有所帮助.

关键词：数列；易错题型；评析

数列问题是高中数学的重要内容，是学习高中数学的重点、难点，也是历届高考必考的内容。本文归纳了数列的易错题型，结合例题分析出错原因，总结应对策略，以提高学生解题的防错意识，进而提高高考数列部分的解题能力.

一、已知 S_n 求通项公式 a_n，忽略了 $n=1$ 时的情况

例 1 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2-2n+5$，则 $\{a_n\}$ 是等差数列吗？如果是，求出通项公式；如果不是，说明理由.

错解：$\because a_n=S_n-S_{n-1}=2n-3$，

$\therefore a_{n+1}-a_n=2(n+1)-3-(2n-3)=2$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_n=2n-3$.

分析：本题应明确 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 成立的条件是 $n\geqslant 2$，而数列 $\{a_n\}$ 的通项公式中的 a_n 应当包含第一项 a_1，要注意分 $n=1$ 和 $n\geqslant 2$ 两种情况进行讨论，所以 $n=1$ 时是否满足所求通项应进行验证.

正解：$\because a_1=S_1=4$，

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-3(n\geqslant 2)$，

当 $n=1$ 时，$a_1=2\times 1-3=-1\neq 4$，

$$a_n=\begin{cases}4, & n=1,\\ 2n-3, & n\geqslant 2.\end{cases}$$

故由等差数列的概念知，数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列.

二、等比数列中，应用 S_n 时忽略了 $q=1$ 致错

例 2 设数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，前 n 项和为 S_n，若 $S_3=3a_3$，求公比 q.

错解：$\because\ S_3=3a_3$，

$\therefore \dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=3a_1q^2$，$1+q+q^2=3q^2$，　$\therefore q=-\dfrac{1}{2}$ 或1.

分析：等比数列中使用公式 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 的前提是 $q\neq 1$,若题中无明确指出，则需分情况讨论.否则易忽略公比 $q=1$ 的特殊情况，造成概念性错误.

正解：当 $q=1$ 时，由 $S_3=3a_3$ 得，$3a_1=3a_1$，符合题意，则 $q=1$.

当 $q\neq 1$ 时，由 $S_3=3a_3$ 得，$\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=3a_1q^2$，$1+q+q^2=3q^2$，则 $q=-\dfrac{1}{2}$.

综上所述，公比 q 的值时 1 或 $-\dfrac{1}{2}$.

三、忽视整体思想致错

例 3 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\dfrac{a_5}{a_3}=\dfrac{5}{9}$，则 $\dfrac{S_9}{S_5}$ 等于（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

错解：$\because \dfrac{a_5}{a_3}=\dfrac{5}{9}$，即 $\dfrac{a_1+4d}{a_1+2d}=\dfrac{5}{9}$，

$\therefore a_1+4d=5$，$a_1+2d=9$. $\therefore d=-2,\ a_1=13$.

$$\frac{S_9}{S_5}=\frac{9\times 13+\frac{9\times 8}{2}\times(-2)}{5\times 13+\frac{5\times 4}{2}\times(-2)}=1.$$

分析：本题的结果虽然是正确的，但过程错误. 由 $\dfrac{a_1+4d}{a_1+2d}=\dfrac{5}{9}$ 我们可以令 $a_1+4d=5t,\ a_1+2d=9t(t\neq 0)$，再进行下面的计算. 不过这样做太繁琐，下面我们给出一种简便的方法.

正解：$\because a_1+a_9=2a_3$，$a_1+a_5=2a_3$，

$$\therefore \frac{S_9}{S_5}=\frac{\frac{9(a_1+a_9)}{2}}{\frac{5(a_1+a_5)}{2}}=\frac{9a_5}{5a_3}=\frac{9\times 5}{5\times 9}=1$$，故选（A）

四、弄错了数列的首项

例 4 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=2$，$a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2},n\in N^*$. 令 $b_n=a_{n+1}-a_n$，

证明：$\{b_n\}$ 是等比数列；

错解：$b_1=a_2-a_1=1$；

当 $n\geq 2$ 时，

$$b_n=a_{n+1}-a_n=\frac{a_{n-1}+a_n}{2}-a_n=\frac{a_{n-1}-a_n}{2}=-\frac{1}{2}b_{n-1},$$

$\therefore \{b_n\}$ 是首项为 $a_1=1$，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列.

分析：数列的首项、项数、末项等是很容易错的基本量，所以在解答数列题时，在这些地方要谨慎数列 $\{b_n\}$ 的首项就是 $n=1$ 时对应的项，即 $b_1=a_2-a_1=1$，而不是想象中的 $a_1=1$.

正解：$b_1=a_2-a_1=1$；

当 $n\geq 2$ 时，

$$b_n=a_{n+1}-a_n=\frac{a_{n-1}+a_n}{2}-a_n=\frac{a_{n-1}-a_n}{2}=-\frac{1}{2}b_{n-1},$$

$\therefore \{b_n\}$ 是首项为 $b_1=a_2-a_1=1$，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列.

总之，针对易错、易混、易忽略的地方，学生平时要着重练习，进行及时的辨析，确保此类问题不再出错，在练习、纠错过程中升华自己的认识和见解，快速提高防错和解题能力.

参考文献：

[1]《高中同步测控全优设计优佳学案 》数学必修五，云南教育出版社 2016 年 6 月第 1 版 .
[2]《普通高中数学新课程标准》(实验)，人民教育出版社.
[3]普通高中课程标准实验教科书《数学》必修 5，人民教育出版社,2007 年 1 月第 3 版.
[4]《世纪金榜》高中全程复习方略数学（理科）齐鲁电子音像出版社，2018 年 6 月第 1 版.
[5]《2018 年云南省普通高中学业水平标准与考试说明》数学，云南出版集团，云南美术出版社，2017 年 11 月第 1 版.