函数值域求法探讨

◆祝鸿江

（黔西南民族职业技术学院　贵州兴义　562400）

摘要：函数具有的三要素中，对应法则、定义域、值域，揭示了函数的本质，本文仅就函数的值域求法进行简单探讨。

关键词：函数；值域；求法

一：形 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}(x\neq-\dfrac{b}{a})$ 如函数的值域求法。

反函数法：函数的 $y=f(x)$ 定义域为 D 值为 B,函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$，其定义域为 B，值域为 D。

上式求值域可转换为求反函数的定义域。

$y=\dfrac{cx+d}{ax+b}(x\neq-\dfrac{b}{a})$ 的反函数易求得：$y=\dfrac{d-bx}{ax-c}$，显然 $x\neq\dfrac{c}{a}$，所以函数 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}(x\neq-\dfrac{b}{a})$ 的值域为：$(-\infty,\dfrac{c}{a})\cap(\dfrac{c}{a},+\infty)$。

例题 1：求函数 $y=\dfrac{2-x}{3x-2}$ 的值域。

解：$y=\dfrac{2-x}{3x-2}$ 的反函数为 $y=\dfrac{2x+2}{3x+1}$，定义域为 $(-\infty,-\dfrac{1}{3})\cup(-\dfrac{1}{3},+\infty)$，所以函数 $y=\dfrac{2-x}{3x-2}$ 的值域为 $(-\infty,-\dfrac{1}{3})\cup(-\dfrac{1}{3},+\infty)$。

二：形如函数的 $y=\dfrac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c}$ 的值域

判别式法：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 变形为 $ax^2+bx+c-y=0$，看做是关于 x 的一个一元二次方程，对于 x 有解，那么判别式 $b^2-4a(c-y)\geq0$，得关于 y 的一个不等式，解得

当 a > 0 时，$y\geq\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；当 a < 0 时,$y\leq\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。所以 a > 0 时，值域 $[\dfrac{4ac-b^2}{4a},+\infty)$，当 a<0 时，值域 $(-\infty,\dfrac{4ac-b^2}{4a}]$，说明：这里需要对区间端点情况讨论。

因为当 $x=-\dfrac{b}{2a}$，等号成立。

例题 2：求函数 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 的值域。

解：将函数 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 变形为 $(y+1)x^2+y-1=0$，方程关于 x 有解，判别式 $-4(y+1)(y-1)\geq0$,即 $-1\leq y\leq1$，当 x = 0 时 y = 1，当 y = – 1 时带人方程，得矛盾方程 $-1-x^2=1+x^2$，所以 $y\neq-1$，函数的值域为（ – 1 ， 1]。

例题 3：求函数 $y=\dfrac{1+4x+x^2}{1+x^2}$ 的值域。

解：将函数 $y=\dfrac{1+4x+x^2}{1+x^2}$ 变形得 $(y-1)x^2-4x+y-1=0$，方程关于 x 有解，判别式 $\Delta=16-4(y-1)^2\geq0$，化为 $y^2-2y-3\leq0$，得 $-1\leq y\leq3$，讨论端点，当 y = – 1 时带人方程得 x = – 1，当 Y = 3 时得 x = 1，所以函数的值域为［ – 1 ， 3 ］。

例题 4：求函数 $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$ 的值域。

解法 1：原函数 $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$ 可化为 $x^2-(y+2)x+y+5=0$，关于 x 有解，判别式 $y^2\geq16$，整理得 $y^2\geq16$，即 $y\geq4$ 或 $y\leq-4$，当 y = 4 时， x = 3 ，当 y = – 4 时， x = – 1 ，所以值域为：$[4,+\infty)\cup(-\infty,-4]$。注：在用判别式求解时，如果原函数的定义域不是实数集合时，应综合函数的定义域把扩大的部分去除。此题也可以利用不等式 $a+b\geq2\sqrt{ab},a+b+c\geq\sqrt[3]{abc}(a,b,c\in R^+)$

解法 2：因为 y = $\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}=(x-1)+\dfrac{4}{x-1}$，当 x > 1 时，$(x-1)+\dfrac{4}{x-1}\geq2\sqrt{(x-1)\dfrac{4}{x-1}}=4$，当且仅当 $x-1=\dfrac{4}{x-1}$，即 x = 3 ，所以当 x > 1 时 $y\in[4,+\infty)$。当 x < 1 时，$-[(1-x)+\dfrac{4}{1-x}]\geq2\sqrt{(1-x)\dfrac{4}{1-x}}=4$，即 $y\leq-4$，此时 x = – 1．综上值域为 $[4,+\infty)\cup(-\infty,-4]$.

例题 5：求函数 $y=x+\sqrt{x(2-x)}$ 的值域。

解：两边平方整理的 $2x^2-2(y+1)x+y^2=0$，从这个函数看它的定义域 $x\in R$，关于 y 的方程有解，判别式 $\Delta=4(y+1)^2-8y\geq0$，解得：$1-\sqrt{2}\leq y\leq1+\sqrt{2}$，注意现在得到的 y 的范围不是所求函数的值域，因为原来的函数的定义域由 $x(2-x)\geq0$ 得 $0\leq x\leq2$，所以要把扩大的部分去除。由 $\Delta\geq0$，仅保证关于 x 的方程：$2x^2-2(y+1)x+y^2=0$ 在实数集有解，不能够保证其实根在区间 $[0,2]$ 上，即不能确保原方程有实数根，由 $\Delta\geq0$ 求出的范围可能比 y 的实际范围大，所以不能够得出此函数的值域是，$\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$。需要进一步确定原函数的值域。

$\because0\leq x\leq2\therefore y=x+\sqrt{x(2-x)}\geq0,\therefore y_{\min}=0$ 把 $y=1+\sqrt{2}$ 代入原方程得：$x_1=\dfrac{2+\sqrt{2}-2^4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\in[2,2]$，$\therefore$ 原函数的值域为：$\left[0,1+\sqrt{2}\right]$

结束语：

函数值域求法还有很多办法，比如配方法、分离系数法、求导法、变量代换法、单调性法，直接观察法，树型结合法等。具体选择哪种方法，需要根据具体的题型选择方法。

作者简介：祝鸿江（1964.11.11– ），男，汉族，黔西南民族职业技术学院副教授，主要研究方向为数学教学。