巧用点在椭圆内解题

◆李正顺

（浙江省温州市瓯海区三溪中学 325016）

点与椭圆的位置关系有三种，点在椭圆上，点的坐标满足椭圆方程；点在椭圆外，点的坐标代入椭圆方程左边会大于右边 1；点在椭圆内，点的坐标代入椭圆方程左边会小于右边 1，在与椭圆相关的很多问题中我们发现都有将点在椭圆内做为背景的，本文试图从点在椭圆内几个问题为突破口，阐明解决此类问题的简洁方法,以引起对此类问题的重视。

1. 充分利用点在椭圆内判断直线与椭圆的位置关系

直线与椭圆的位置关系判断是将直线方程代入椭圆方程，化为关于 x 或 y 的一元二次方程，利用判别式来判断，当 $\Delta>0$ 时，方程有两解，直线与椭圆有两个交点，此时直线与椭圆相交，当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的解，直线与椭圆只有一个交点，直线与椭圆则是相切关系，而当 $\Delta<0$ 时，方程无解，直线与椭圆此时是相离位置关系，请看下例：

例 1.判断直线 $y=kx-k+1$ 与椭圆 $x^2/9+y^2/4=1$ 的位置关系。

思路探求一；按照判断直线与二次曲线位置关系的通法，将直线方程代入椭圆方程，利用一元二次方程判别式判断。

解法一：由

$$\begin{cases} y=kx-k+1 \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases} \text{消去}y\text{整理后得}:(4+9k^2)x^2+18k(1-k)x+9(1-k)^2-36=0$$

$$\Delta=[18k(1-k)]^2-4(4+9k^2)[9(1-k)^2-36]=36(32k^2+8k+12)>0$$

$\therefore$ 直线与椭圆相交

方法点睛：利用判别式法判断直线与椭圆的位置关系是最基本的方法，但运算量较大，而且麻烦，一般的，直线与二次曲线的位置关系都可以用此法判断。

思路探求二；所给直线方程是点斜式展开移项的形式，直线过定点（1，1），可以利用点与椭圆的位置关系来判断直线与椭圆的位置关系。

解法二：直线 y=kx−k+1 过定点（1，1），将 x=1,y=1 代入椭圆方程左边得：$\frac{1^2}{9}+\frac{1^2}{4}=\frac{13}{36}<1$，所以点（1，1）在椭圆内，从而可知直线与椭圆是相交位置关系。

方法点睛：巧妙利用点与椭圆的位置关系，可以起到事倍功半的作用，和通法相比避免了复杂的运算，明显简捷，易掌握；解题时需多注意这种关系的应用。

巧用点在椭圆内求解参数取值范围

参数取值范围问题是每种考试命题的热点问题，与椭圆有关的参数取值范围问题是更是热点中的热点，解决此类问题常用方法是将参数分离出来，转化为求函数的最值问题，当然有时也转化为利用判别式法求解。请看例题；

例 2. 已知椭圆 $x^2/4+y^2/3=1$，试确定 m 的取值范围，使对于直线 l:y=4x+m，椭圆上总有两点关于直线 l 对称。

思路探求一；利用直线与椭圆相交，将直线方程与椭圆方程联立，化为一元二次方程，令判别式大于 0，可求得 n 范围，再利用中点在直线 l 上可得 m 与 n 的等量关系，从而求得 m 取值范围。

解法一：设椭圆上存在两点 A、B 两点关于直线 l 对称，AB 的中点为 M，直线 AB 的方程

为$y=-\frac{x}{4}+n$，代入$x^2/4+y^2/3=1$,整理得$13x^2-8nx+16n^2-48=0$.

由$\Delta>0$，解得$n\in(-\frac{\sqrt{13}}{2},\frac{\sqrt{13}}{2})$;由韦达定理得：$x_A+x_B=\frac{8n}{13}$,

$\therefore x_M=\frac{4n}{13}$,代入直线$AB$方程可得$y_M=\frac{12n}{13}$

$\because AB$的中点$M(\frac{4n}{13},\frac{12n}{13})$在直线$l:y=4x+m$上,$\therefore m=-\frac{4n}{13}$,

故$m\in(-\frac{2\sqrt{13}}{13},\frac{2\sqrt{13}}{13})$

方法点睛：此法是常规解法，由于直线与椭圆位置关系清楚，所以考虑判别式法，但与的关系不一定能找出，这正是本类题目不易解决的关键。

思路探求二；注意到 AB 的中点一定在椭圆内部，可以将 AB 中点坐标通过表示出来，再利用点在椭圆内，将点的坐标代入椭圆方程左边，即可得关于 m 的不等式，解此不等式求出 m 的取值范围。

解法二：设椭圆上存在两点 A（x_A,y_A）、B（x_B,y_B）两点关于直线 l 对称，AB 的中点为

M（x_M,y_M）则有 $\frac{x_A^{\ 2}}{4}+\frac{y_A^{\ 2}}{3}=1$ （1）

$\frac{x_B^{\ 2}}{4}+\frac{y_B^{\ 2}}{3}=1$ （2）

（2）−（1）得：

$$\frac{(x_B+x_A)(x_B-x_A)}{4}+\frac{(y_B+y_A)(y_B-y_A)}{3}=0,$$

$\therefore k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-\frac{3}{4}\bullet\frac{x_A+x_B}{y_A+y_B}=-\frac{3x_M}{4y_M}=-\frac{1}{4}$，从而得 $y_M=3x_M$，

$\because$ 中点 M 在直线上，$\therefore y_M=4x_M+m$，解得 $x_M=-m,y_M=-3m$，

$\because$ 中点 M 在椭圆内，$\therefore\frac{x_M^{\ 2}}{4}+\frac{y_M^{\ 2}}{3}<1$，即 $\frac{(-m)^2}{4}+\frac{(-3m)^2}{3}<1$，

解得 $m\in(-\frac{2\sqrt{13}}{13},\frac{2\sqrt{13}}{13})$

方法点睛：这里用到的是解析几何中常用的点差法，同时注意到点与椭圆的位置关系，将求取值范围问题巧妙转化为点在椭圆内问题，通俗易懂，容易掌握。

妙用点有椭圆内求椭圆离心率

椭圆的离心率是椭圆的重要性质，它反映着椭圆的扁平程度，所以在许多问题中都会涉及求椭圆的离心率。

例 3. 已知 F_1,F_2 分别是椭圆的两个焦点，且满足 $\overrightarrow{MF_1}\bullet\overrightarrow{MF_2}=0$ 的点 M 总在椭圆内部，求椭圆离心率的取值范围。

思路探求一：由于点 M 在椭圆内部，所以点 M 的坐标代入椭圆方程左边小于 1，再根据

$\overrightarrow{MF_1}\bullet\overrightarrow{MF_2}=0$ 可得点 M 坐标的第二个关系式，解出横坐标的平方满足的不等式即可。

解法一：设椭圆方程为

$x^2/a^2+y^2/b^2=1,F_1(-c,0),F_2(c,0),M(x_M,y_M)$

由 $\overrightarrow{MF_1}\bullet\overrightarrow{MF_2}=0$ 得：$x_M^{\ 2}-c^2+y_M^{\ 2}=0$ （1）

由点 M 在椭圆内得：$\frac{{x_M}^2}{a^2}+\frac{{y_M}^2}{b^2}<1$ （2）

联立（1）（2）得：

${x_M}^2>\frac{a^2c^2-a^2b^2}{c^2}$，因为点 M 在椭圆内，所以只需 $\frac{a^2c^2-a^2b^2}{c^2}<0$ 即 $c^2<b^2$

$\therefore$ 椭圆离心率取值范围为 $e\in(0,\sqrt{2}/2)$

方法点睛：找到不等量关系是解题的关键，此处充分利用了点 M 在椭圆内，点 M 的横坐标的平方不能小于 0 这一条件，得到椭圆相关参数的不等关系，进而求出离心率的取值范围。

思路探求二：注意到点 M 在椭圆内，同时在以原点为园心，半焦距长为半径的园上（除去园与长轴和交点），而由椭圆可知，椭圆上离中心最近的点是短轴的端点，所以只需短轴端点到原点距离大于园半径即可。

解法二：设椭圆方程为

$x^2/a^2+y^2/b^2=1, F_1(-c,0), F_2(c,0), M(x_M,y_M)$ 由 $\overrightarrow{MF_1}\bullet\overrightarrow{MF_2}=0$ 得：${x_M}^2-c^2+{y_M}^2=0$，所以点 M 在以原点为园心，半径为园上（除去园与椭圆长轴的交点），同时点 M 又在椭圆内，由椭圆方程可知椭圆上短轴端点离原点距离最小，所以只需 c<b,从而可得椭圆离心率取值范围为 $e\in(0,\sqrt{2}/2)$。

方法点睛：此处巧妙利用了点 M 的“双重身份”，实现了等量与不等量之间的转化，同时椭圆的性质也是解题过程中必不可少的工具。

以上是点在椭圆内的几种典型问题，点在椭圆内还有许多其他问题，在此不再一一展开，由于笔者水平有限，不足之处还请各位专家同行指导。

反馈练习：

1. 若直线 y=kx+1(k$\in R$）与椭圆 $x^2/5+y^2/m=1$ 恒有公共点，求实数 m 的取值范围。

2. 已知椭圆的两个焦点分别为 F_1,F_2，如果满足 $\angle F_1QF_2=120^\circ$ 的点 Q 都在椭圆内部，求椭圆离心率的取值范围。

答案：1. $\{m/m\geq 1 且 m\neq 5\}$ 2. $e\in(0,\sqrt{3}/2)$