

非齐次矩阵方程解的结构

◆陈彦恒 贾松芳

(重庆三峡学院 数学与统计学院 重庆万州 404200)

摘要: 给出了非齐次矩阵方程 $AX=B$ 解的结构, 推广了非齐次线性方程组解的结构。

关键词: 非齐次矩阵方程; 解的结构; 推广

矩阵方程作为一类代数方程, 广泛应用于现代系统控制等工程领域^[1]。在应用过程中, 关键问题是矩阵方程解的问题。本文从理论给出了非齐次矩阵方程 $AX=B$ 解的结构, 并给出了通解的表达式, 推广了非齐次线性方程组解的结构。为了方便, 总假 $R(A)=R(A,B)$ 来保证 $AX=B$ 总有解, P 是一个数域。文中出现的数学符号都是标准的, 可参见文献^[2,3]。

一、非齐次矩阵方程解的性质

我先给出非齐次矩阵方程的定义, 形如 $AX=B$ (1), 其中 $A \in P^{m \times n}$, $X \in P^{n \times s}$, $O \neq B \in P^{m \times s}$, 的方程称为一个非齐次矩阵方程, 且称齐次矩阵方程 $AX=O$ (2) 为它的导出方程。下面给出(1)的性质。

性质1 若 X_1, X_2 是(1)的两个解, 则 $X_1 - X_2$ 是(2)的解。

证明 因 $A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = O$, 所以 $X_1 - X_2$ 满足方程(2)。

性质2 若 X^* 是(1)的一个解, Y 是(2)的一个解, 则 $X^* + Y$ 是(1)的解。

证明 由于 $A(X^* + Y) = AX^* + AY = B + O = B$, 所以 $X^* + Y$ 满足方程(1)。

二、非齐次矩阵方程解的结构

由性质1, 性质2, 我们不难得到下面定理, 它推广了非齐次线性方程组解的结构。

定理1 设 X^* 是(1)的一个解, $Y_1, Y_2, \dots, Y_t$ 是(2)的解空间的一个基, 则(1)的任一个解 X 总可表示为 $X = k_1 Y_1 + k_2 Y_2 + \dots + k_t Y_t + X^*$, $k_1, k_2, \dots, k_t \in P$ 。 (3)

证明 设 X 是(1)的任一个解, 则由性质1知, $X - X^*$ 是(2)的解, 从而 $X - X^*$ 可以被 $Y_1, Y_2, \dots, Y_t$ 线性表示, 即存在 $k_1, k_2, \dots, k_t \in P$, 使得 $X - X^* = k_1 Y_1 + k_2 Y_2 + \dots + k_t Y_t$,

故 $X = k_1 Y_1 + k_2 Y_2 + \dots + k_t Y_t + X^*$, $k_1, k_2, \dots, k_t \in P$ 。

注1 (3)式称为方程(1)的通解, 是(1)的一个特解与导出方程(2)的通解的和, 推广了非齐次线性方程组解的结构。

注2 从非齐次矩阵方程解的结构来看, 求(1)的通解关键是寻找它的一个特解与导出方程(2)的解空间的一个基, 其中(2)的解空间的基可以通过线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系来构造, 即若 $R(A)=r$ 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系, 则

$$Y_{1j} = (\alpha_1, 0, \dots, 0)_{m \times s}, Y_{2j} = (0, \alpha_2, \dots, 0)_{m \times s}, \dots, Y_{sj} = (0, \dots, 0, \alpha_s)_{m \times s}, j=1, \dots, n-r$$

是(2)的解空间的一个基。此时定理1中的 $t = s \times (n-r)$ 。这些都可以通矩阵的初等行变换方法来处理。

三、举例

例1 解矩阵方程 $AX=B$ 其中,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

解 对 (A, B) 施行初等行变换,

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 6 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而 $R(A, B) = R(A) = 1$, 所以矩阵方程有解, 且原矩阵方程

的一个特解是 $X^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\alpha = (3 \ 1)^T$ 。依据注2, $AX=O_{2 \times 3}$ 解空间的一个基为

$$Y_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Y_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而据定理1, 原矩阵方程通解为

$$X = X^* + k_1 Y_{11} + k_2 Y_{21} + k_3 Y_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意数。

例2 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, 且 $AX=B$, 求 X 。

解 对 (A, B) 施行初等行变换, 得到

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 & 9 & 7 \\ 4 & -3 & 3 & 1 & 11 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 7 & 5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & 8/5 & 16/5 & 14/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & 9/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而 $R(A, B) = R(A) = 2$, 所以原矩阵方程有解, 且它的一个

特解是 $X^* = \begin{pmatrix} 8/5 & 16/5 & 14/5 \\ 9/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 线性方程组 $Ax=0$ 的一个基

基础解系为 $\alpha = (-3/5, 1/5, 1)^T$ 。依据注2, $AX=O_{3 \times 3}$ 解空间的一个基为

$$Y_{11} = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Y_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而由定理1, 原矩阵方程通解为

$$X = X^* + k_1 Y_{11} + k_2 Y_{21} + k_3 Y_{31} = \begin{pmatrix} 8/5 & 16/5 & 14/5 \\ 9/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

参考文献:

- [1] 蔺小林, 矩阵方程 $AXB+CXD=E$ 的解法研究[J], 陕西科技大学学报, 21(5), 2013, 13-15.
- [2] 姜友谊, 吴艳秋, 邹黎敏. 线性代数[M]. 北京: 科学出版社, 2015.8.
- [3] 陈维新. 线性代数简明教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.8.

作者简介: 陈彦恒 (1980-), 男, 汉, 河南西平人, 副教授、重庆三峡学院 数学与统计学院, 研究方向: 主要从事有限群论与代数学的教育教学工作。

基金项目: 该文由重庆市教科科研资助项目 (KJ1710254), 重庆三峡学院重点项目 (14ZD16), 重庆三峡学院数学与统计学院教改项目资助。