直线参数方程在解析几何中的应用

◆蔡 逸

（武汉市第六中学 2016 级（3）班 430000）

摘要：解析几何问题中，常常需要求解弦长，特别是需要求解多条弦长的关系，这种题型使用直线的参数方程可大大的简化思维和运算，值得推广。

关键词：参数方程；弦长问题；定点问题

解析几何是高中数学知识中十分重要的部分，由于其能够有效地考查学生的数形结合思想，运算能力，分类讨论，思维深度以及在考场上的应变能力和心理素质等，在历届高考数学试卷中当仁不让的成为了重点和难点。

在解析几何的学习中，我们主要学习了椭圆，双曲线及抛物线为主的圆锥曲线，并且养成了对解析几何大题的一般答题思路：找到共性，设出坐标，将直线方程与曲线方程联立，用韦达定理得出坐标关系，再根据题设进行解答，这种做法虽具有一定的普遍性，但在计算解答的过程中，往往涉及复杂的化简与代换，而在高考紧张的气氛中，一旦算错，很容易满盘皆输，因此在解决直线与曲线之间关系的问题中，找到特殊的解决办法来尽量减少我们的计算量并且提高准确度，对于我们攻克高考压轴题是大有裨益的，同时也可让我们保持良好的心态收获更好的成绩。

一、题型分析：

高考中，解析几何题一般位于倒数第二题的位置，第一问一般是要求曲线方程，离心率或定点坐标等，此问的结论一般作为后面解决问题的依据，难度较小。而在难度加深的第二问中，直线与曲线相结合的问题有，求某点的轨迹，定值问题，最大值最小值等。

下面通过示例来讨论在解析几何运算时，利用直线参数方程来巧解问题并减少计算量。

二、直线参数方程

1、直线参数方程的引入

我们知道直线的点斜式为：$y-y_0=k(x-x_0)$

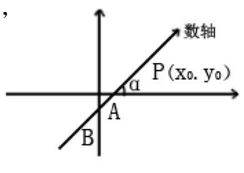
此处k所代表的意义为直线与x轴正半轴夹角的正切值即$k=\tan\alpha$

$\therefore$不妨改写为$y-y_0=\tan\alpha(x-x_0)$，

$\therefore \dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$引进参数$t$

$\therefore \dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{\sin\alpha\cdot t}{\cos\alpha\cdot t}$，

$\therefore \begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数）



而在实际运算中，我们如何引进参数t呢？

实际运算中，常常会出现P、A、B三点之间的线段运算，此时不妨将AB直线看作数轴，AP方向为正方向，P为原点，则设A处参数为t，则$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$

利用这种思路，我们可以更好的解决线段长之间的计算

[数轴 → “原点”→ 正负 → 线段长]

2、尝试用直线参数方程解决下列问题

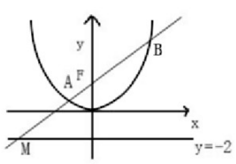
例 1：平面上动点P到动点$F(0,1)$的距离比它到直线$l: y=-2$的距离小 1

（1）求动点P的轨迹C的方程

（2）过点F作直线与曲线C交于两点A、B，与直线l交于点M，求$|MA|\cdot|MB|$的最小值

解析：这里只对第②问进行两种方法的对比，由①得：$x^2=4y$

方法一：[常规解法]



设$\begin{cases}AB: y=kx+1\\ y=-2\end{cases}$

$\therefore x=-\dfrac{3}{k}$，$\therefore M\left(-\dfrac{3}{k},-2\right)$

设$A(x_1,y_1)\ B(x_2,y_2)$

$\therefore \begin{cases}y=kx+1\\ y=\dfrac{1}{4}x^2\end{cases}$

$\therefore \dfrac{1}{4}x^2-kx-1=0$，$x_1+x_2=4k\ \ x_1\cdot x_2=-4$

$\because \cos<\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}>=\cos 0^2=1$

$\therefore |MA|\cdot|MB|=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

$\therefore |MA|\cdot|MB|=\left(x_1+\dfrac{3}{k},y_1+2\right)\cdot\left(x_2+\dfrac{3}{k},y_2+2\right)$

$=x_1x_2+\dfrac{3}{k}(x_1+x_2)+\dfrac{9}{k^2}+y_1y_2+2(y_1+y_2)+4$

又$\because y_1y_2=(kx_1+1)(kx_2+1)$，$y_1+y_2=kx_1+1+kx_2+1$

$\therefore |MA|\cdot|MB|=(k^2+1)x_1x_2+\left(\dfrac{3}{k}+3k\right)(x_1+x_2)+\dfrac{9}{k^2}+9$

将$x_1+x_2=4k\ \ x_1\cdot x_2=-4$代入得

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(k^2+1)(-4)+\left(\dfrac{3}{k}+3k\right)\cdot 4k+\dfrac{9}{k^2}+9=8k^2+\dfrac{9}{k^2}+17$

$\therefore$当$8k^2=\dfrac{9}{k^2}$，即$k^2=\dfrac{9}{4}$时，$\min=17+2\sqrt{2}$

方法二：参数方程

如图，以AB所在直线建立数轴，F为原点，FB方向为正方向，数轴与x轴正方向夹角为α，设数轴上的点参数为t，M处参数为t_M

$AB:\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$，联立$y=\dfrac{1}{4}x^2$

$\therefore t^2\cos^2\alpha-4t\sin\alpha-4=0$

$\therefore t_1+t_2=\dfrac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\qquad t_1t_2=\dfrac{-4}{\cos^2\alpha}$

将$y=-2$代入$t_M=\dfrac{-3}{\sin\alpha}$

$\therefore \overrightarrow{MA}=t_1-t_M\qquad \overrightarrow{MB}=t_2-t_M$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=t_1t_2-t_M(t_1+t_2)+{t_M}^2$

$$=\frac{-4}{\cos^2\alpha}+\frac{12}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{9}{\sin^2\alpha}$$

$$=\left(\frac{9}{\sin^2\alpha}+\frac{8}{\cos^2\alpha}\right)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$

由柯西不等式得$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\geq\left(3+2\sqrt{2}\right)^2=17+2\sqrt{2}$

三、小结

由以上的方法对比可以很明显的看出，在解答一些相对较复杂的解析几何问题时，运用参数方程解题，不仅可以减少我们的计算量，还可以简化我们的解题步骤，让我们在做题时达到事半功倍的效果。

当然，除了参数方程外，还有其他比如斜率问题，共切线问题，二次曲线系等就不一一列举了。