利用二次曲线系求解一类高中圆锥曲线问题

◆方礼喆

（武汉外国语学校高三（2）班　430000）

摘要：利用曲线系解题实质上是取曲线方程中的特征量（如直线方程中的斜率k，截距b，圆的半径R,有心曲线中的a、b等）作为变量，得到曲线系，根据所给的已知量，采用待定系数法，达到解决问题的目的.常常体现的是参数变换的数学观点和整体处理的解题策略.通常的题型有求点的坐标、求曲线的方程、求图形的性质等等.

关键词：二次曲线系；四点共圆；圆系；定点问题

圆锥曲线是高中数学解析几何的重中之重，作为必考题的倒数第二题，难度也是整张高考数学试卷中最难的题目之一，如何又快又好地解出这道题无疑是学生所追求的，下给出一种利用二次曲线系的解法。

结论 1：设$l_1: Ax+By+C=0$, $l_2: Dx+Ey+F=0$

则方程$\left(Ax+By+C\right)\left(Dx+Ey+F\right)=0$表示两条直线$l_1,l_2$上的所有点

结论 2：一般地，设两条二次曲线的方程分别为$f_1\left(x,y\right)=0$，$f_2\left(x,y\right)=0$,那么过这两条二次曲线交点的二次曲线系为

$\lambda_1 f_1\left(x,y\right)+\lambda_2 f_2\left(x,y\right)=0$,其中$\lambda_1,\lambda_2$为参数.

一、简化运算

圆锥曲线的大题，往往需要联立直线与圆锥曲线方程表示交点坐标，再结合韦达定理求解，而这一过程的计算量通常不小，而且也容易算错。而二次曲线系的解法就避免了这样繁杂的运算。

例 1.(2010·江苏)在平面直角坐标系xoy中,如图，$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左右顶点为$A$、$B$,右焦点为$F$,设过$T$的直线$TA$、$TB$分别交椭圆于$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，其中$T\left(9,m\right),m>0,y_1>0,y_2<0$.求证:直线$MN$必过定点.

解:$TA: y=\frac{m}{12}\left(x+3\right)$，$TB: y=\frac{m}{6}\left(x-3\right)$

设$MN: x=ty+n$

$MN\cup AB:\left(x-ty-n\right)y=0$

$TA\cup TB$:

$$[\frac{m}{12}\left(x+3\right)-y]\cdot[\frac{m}{6}\left(x-3\right)-y]+\mu(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}-1)=0$$

它们都是过A,B,M,N四点的二次曲线，令两者一致，xy与y系数之比为

$$\frac{1}{\frac{-m}{12}-\frac{m}{6}}=\frac{-n}{-\frac{m}{4}+\frac{m}{2}}$$，得$n=1$

所以MN过定点$\left(1,0\right)$.

二、转化条件

利用二次曲线系解题是一种从宏观层面对图形定性的解题方法，他能在我们无法通过平常套路转化条件时达到出其不意，奇招制胜的效果

例 2. $y=\sqrt{3}x+b$与$y^2=2px(p>0)$交于A、B,过A、B的圆交抛物线于C、D,求AB、CD夹角.

解：设$CD: x=my+n$　则$AB\cup CD$：$(\sqrt{3}x-y+b)\left(x-my+n\right)=0$那么该圆的方程可以表示为

$$\lambda(\sqrt{3}x-y+b)\left(x-my+n\right)+(y^2-2px)=0$$

由于圆的方程中xy项系数为 0,有

$-\sqrt{3}m-1=0$，$m=-\frac{1}{\sqrt{3}}$所以CD的斜率$k=-\sqrt{3}$,夹角$\theta=60°$

点评：对于圆，我们通常利用直径对应的圆周角为直角；半径处处相等等性质对条件进行转化，而此题中圆的圆心、半径都很难寻找，转化条件十分困难。因此我们直接利用圆的方程中xy项系数为 0 的特征，在过A、B、C、D四点的二次曲线系中直接找出唯一的圆，再反回去求解关于CD直线的信息。这种解题方法与我们平时的做法从思维方式上来看相差甚远，因而有巧夺天工的感觉。

例 3.(2014·全国大纲卷)已知抛物线$C: y^2=4x$的焦点为F，过F的直线l与C相交于A、B两点,若AB的垂直平分线l'与C相交于M、N两点,且A、M、B、N四点在同一圆上,求l的方程.

解：已知$F\left(1,0\right)$,设$l: x=my+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

由$x=my+1$，$y^2=4x$得$y^2-4my-4=0$,

有$y_1+y_2=4m$, $\therefore AB$中点的纵坐标为$y=\frac{y_1+y_2}{2}=2m$

计算得中点的坐标为：$(2m^2+1,2m)$

则$MN: x-2m^2-1=\frac{-1}{m}\left(y-2m\right)$

即$x=\frac{-y}{m}+2m^2+3$

A、M、B、N既在抛物线上，也在双直线$AB\cup MN$上，那么过四点的圆的方程满足

$$\left(x-my-1\right)(x+\frac{y}{m}-2m^2-3)+\lambda(y^2-4x)=0$$

由①x^2项与y^2项系数相等②xy项系数为 0

得$1=-1+\lambda$，$-m+\frac{1}{m}=0$解得$\lambda=2$，$m=\pm1$

三、一个特殊例子

例 4.在直角坐标系xoy中,二次函数$y=x^2+mx-3$的图像与x轴交于A、B两点,点C的坐标为$(0,1)$,当m变化时,过A、B、C三点的圆在y轴上截得的弦长是否为定值？若是,求出该定值;若不是,请说明理由.

解:对于A、B，他们是x轴与抛物线的交点，故对于任意过A、B两点的曲线的方程，当$y=0$时，x必有两根为方程$x^2+mx-3=0$的根.那么由圆的方程的特征，设过 A、B 的圆系为$x^2+mx-3+y^2+ny=0$ 其中m、n为参数

$\because$该圆还过$C(0,1)$　$\therefore -3+1+n=0$，$n=2$，则过A、B、C的圆为

$x^2+mx-3+y^2+2y=0,m$为参数

令$x=0$,得$y_1=-3$，$y_2=1$，弦长即为$d=|y_1-y_2|=4$

点评：之所以说这个题是一个“特殊例子”，是因为它的解法中没有前面几个题中将两个二次曲线线性结合得到一个二次曲线系，而是根据题目所给条件直接调制出了圆的方程，再通过余下条件求得参数。虽然能这样做的题少之又少，但是此解法也能体现二次曲线系整体变换的核心思想，值得我们学习。