巧用“变号”思想找到平面所表示的区域

◆赵明睿

（营口开发区第一高级中学　辽宁营口　115007）

摘要：一元二次不等式的解法是高中阶段的重要知识点，而解法中的“变号”思想，通过灵活巧用，对于后续简单线性规划的学习提供了便捷。尤其是运用在确定二元一次不等式的平面区域，巧用“变号”思想，从升维的角度思考问题。

关键词：“变号”平面；区域

在学习二元一次不等式（组）与简单线性规划问题时，有一种常见题型——

例：在坐标平面内找到(x+y−1)(x−y−1)＞0 所表示的平面区域。

分析：(x+y−1)(x−y−1)＞0，利用分类讨论的思想，可以等价转换为$\begin{cases}x+y\,\mathrm{I}1\mathrm{I}0\\ x\mathrm{I}y\mathrm{I}1\mathrm{I}0\end{cases}$或$\begin{cases}x+y\,\mathrm{I}1\mathrm{I}0\\ x\mathrm{I}y\mathrm{I}1\mathrm{I}0\end{cases}$。在坐标平面内找到(x+y−1)(x−y−1)＞0 所表示的平面区域，就等价为在坐标平面内找到$\begin{cases}x+y\,\mathrm{I}1\mathrm{I}0\\ x\mathrm{I}y\mathrm{I}1\mathrm{I}0\end{cases}$或$\begin{cases}x+y\,\mathrm{I}1\mathrm{I}0\\ x\mathrm{I}y\mathrm{I}1\mathrm{I}0\end{cases}$所表示的平面区域。

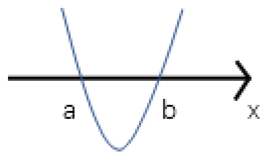
常规的步骤是首先在坐标平面内找到$\begin{cases}x+y\,\mathrm{I}1\mathrm{I}0\\ x\mathrm{I}y\mathrm{I}1\mathrm{I}0\end{cases}$所表示的区域（分别按照画线定界、单侧代点定域的步骤表示出 x+y−1＞0 和 x−y−1＞0，再选取其公共部分），其次在上述坐标平面内找到$\begin{cases}x+y\,\mathrm{I}1\mathrm{I}0\\ x\mathrm{I}y\mathrm{I}1\mathrm{I}0\end{cases}$所表示的区域（步骤同上）。这样的步骤虽然难度不大，但是繁琐费时。

二元一次不等式（组）与简单线性规划问题内容安排在人教 b 版必修五第三章第五节。在实际解题的过程中画线定界、单侧代点定域是两个常见且实用的步骤，包含了二元一次方程在平面直角坐标系上的表示方法，以及点和直线的位置关系。而在人教 b 版必修五第三章第三节，学习的内容是一元二次不等式及其解法，该节课的学习对于找出平面表示的区域有哪些帮助？

在解一元二次不等式时，常常利用数形结合的思想。

例：当 a＞b 时，求一元二次不等式(x−a)(x−b)<0 的解集。

分析：



结合左侧草图，抛物线与 x 轴两交点为零点。

位于 x 轴的上方位置的抛物线上的点，带入方程后，满足(x−a)(x−b)＞0

位于 x 轴的下方位置的抛物线上的点，带入方程后，满足(x−a)(x−b)＜0

因此，找到一元二次不等式(x−a)(x−b)<0 的解集：（a，b）。

我们将形如 x=a 与 x=b 的零点，称之为变号零点，这是因为当抛物线的点位于此类零点的同一侧时，将点的横坐标代入原式，所得不等号方向相同。当点在抛物线上运动时，每经过一个变号零点，不等号方向就发生一次变化，经过两个变号零点，不等号方向改变两次，则与原来不等号方向一致（不发生改变）。

在解一元多次不等式时，仍可以利用变号零点的性质。画出辅助草图，x 轴将满足原式大于零（或小于零）分成一类，可以直接得到解题结果。

在解一元二次不等式时，所利用的抛物线，虽然看似性质比直线复杂，但是实质是一维的问题，我们所研究的范围是抛物线上的所有点。而平面上的抛物线外的点，我们并不做研究。

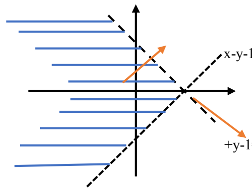
当我们在研究二元一次不等式所表示的平面区域时，相比一元二次不等式，多了一个未知数 y，这导致问题的维度增加了，我们将不能在一条线上研究这个问题，问题的范围扩大到了整个二维平面，坐标平面上的所有点都是研究对象。此时，对于平面上的二元一次函数 z=ax+by+c 来说，ax+by+c=0 是坐标平面上的一条直线，直线上的每一个点所对应的坐标，均满足 z=ax+by+c=0，是该函数的零点。二元一次不等式表示平面区域时，要先画直线定界，ax+by+c=0 将平面分为两个开半平面，同一开半平面的点的坐标带入函数 z=ax+by+c，所得到结果正负号相同，不同开半平面的点的坐标带入函数 z=ax+by+c，所得到结果正负号相反，即同侧同号，异侧异号，当平面上的点从一个开半平面运动到另一个开半平面，要经过直线 ax+by+c=0，对应函数值的正负号改变。这与解一元二次不等式时，利用变号零点的变号性求解解题思路一致。

利用这样的思想再来看(x+y−1)(x−y−1)＞0。

对于方程 z=(x+y−1)(x−y−1)，在平面直角坐标系上的零点，是两条直线：x+y−1=0 和 x−y−1=0.而这两条直线，保持了“变号”的性质。

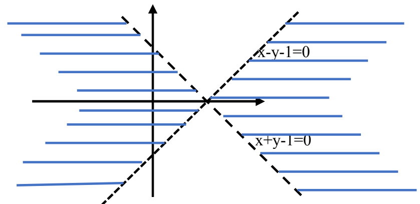
两条直线将平面直角坐标系分成“上“、“下“、”左”、”右”四个部分

先考察“左”部分，代入一点（0,0），(0+0−1)(0−0−1)＞0



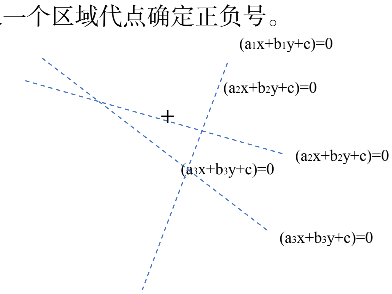
因此”左”部分的所有的点的坐标是原不等式的解，”上”、“下”两部分，分别与”左”部分间隔一条直线，由直线作为零点的“变号”性质可知这两个部分的点的坐标使(x+y−1)(x−y−1)＜0，”上”部分与”右”部分以直线 x−y−1=0 为界，由直线作为零点的“变号”性质可知”右”部分的点的坐标满足(0+0−1)(0−0−1)＞0

最终得到本题所求平面区域如图



被分成的四个区域中，不相邻的两区域的点的坐标对应的函数值正负号相同，由此我们得到一种较快的解题方法：任意找某个区域代点确定正负号，相邻区域的正负号是相反的，确定所有区域的正负号，解出答案。

例：在平面直角坐标系中表示(a1x+b1y+c)(a2x+b2y+c)(a3x+b3y+c)>0 的区域，(a1x+b1y+c)=0，(a2x+b2y+c)=0，(a3x+b3y+c)=0,三条直线将平面直角坐标系最多分成 7 个区域，任取一个区域代点确定正负号。



相邻的区域正负号相反,确定所有区域正负号，找到所有解对应的点的集合，即原不等式对应的平面区域。