“变题”的方法与技术

◆邓彦军

（陕西省汉中市第四中学　陕西汉中　723000）

关键词：变题；相似；创新；最小值

执教二十年的我，随时都在思考如何让抽象的教学概念，数学问题与学生的生活实践、知识储备、思维规律相适应，打造高效课堂，提高教育教学质量，培养学生合作探究的习惯，提高发现问题、分析问题和解决问题的能力。形成良好的数学素养，为以后的学习和工作打下坚实的基础。带着这个梦想，我一直在教学一线上不断尝试“变题”的这一教学模式，使枯燥乏味的数学问题简单化，使学生轻松的走出题海，取得优异的成绩。

“变题”在数学教学中有着很重要的作用，通过变题可以加深对知识的理解，通过变题可以更加突出知识的本质，揭示知识的内在联系，丰富教学方式，帮助学生学会、会学、活学知识，从而激发学生的学习兴趣，提高学生学习数学的能力。变题方法在教学中老师要善于分析问题，对问题进行有效重组，坚持求同存异的原则，提高习题的质量，这样才能更好地进行变题训练。

一、形式相似，本质类同式变题。此类变题较普遍，一般是在新知识讲解中运用，引导学生进行正迁移，不仅利于掌握新知识，也能让学生对已有知识加以巩固。例如在讲了平行线等分线线定理后有一道习题为：

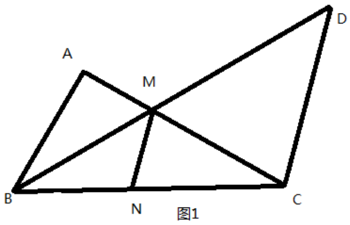

图1

已知：如图 1：AB//CD 连接 AC 与 BD 相交于点 M，过点 M 作 MN//AB 交 BC 于点 W

求证：$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{MN}$

证明：∵AB//MN　　CD//MN

$\therefore \frac{MN}{AB}=\frac{CN}{BC}$ (1)　　　$\frac{MN}{CD}=\frac{BN}{BC}$ (2)

即：(1)+(2) 得：

$\frac{MN}{AB}+\frac{MN}{CD}=\frac{CN}{BC}+\frac{BN}{BC}=\frac{CN+BN}{BC}=\frac{BC}{BC}=1$

故：$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{MN}$

变题 1（如图 2）当 AB⊥BC　CD ⊥BC 垂足分别为点 B C，连接 AC,BD 相交于点 M ,过点 M 作 MN ⊥BC，垂足为点 N

结论$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{MN}$是否照样成立？答案是肯定的。

∵AB⊥BC　　CD⊥BC　MN⊥BC

∴AB//MN　MN//CD　又回到上题中去了!

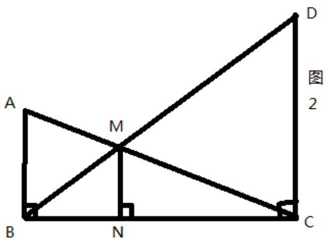

图 2

变题 2（如图 3）若前提条件不变，AB=3 cm　　CD=4 cm 求 MN 的长（利用前面结论即可求出）

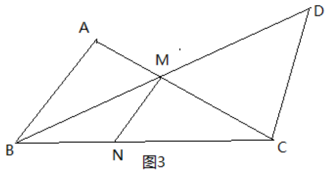

图3

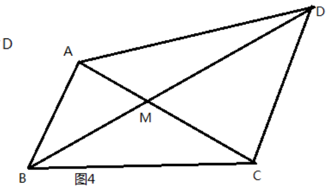

图4

变题 3（如图 4）：连接 AC 与 BD 相交于点 M，不过点 M 作平行线或垂线而是连接 AD

则易证：(1) $S_{\Delta BCM}=S_{\Delta AMD}$

(2) $S_{\Delta BCM}\cdot S_{\Delta BCM}=S_{\Delta ABM}\cdot S_{\Delta CMD}$

这一结论的运用在数学考试中会经常出现。

通过这样形式相似本质类同的变题，可以让学生将知识进行内在的联系，主动建构知识，加深对知识的理解。

二、形式相似，本质不同。此类变题是以学生看似很难，但它还是不会脱手课本上所学的基本知识，只有吃透、理解、思考时才会得心应手，轻车熟路。例如，近几年陕西中考题填空题的最后一题，都是求线段或面积的最大值或最小值，其实质还是利用了课本上：直线外一点与已知直线上点的所有连线段中，垂线段最短。

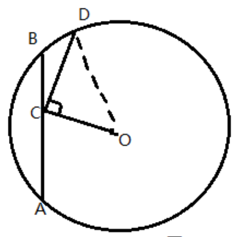

图5

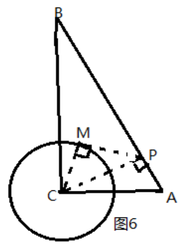

图6

（一）变题 1（如图 5）若点 C 是⊙O 中 AB 弦上的任意一点且 OC⊥CD 若 AB=2$\sqrt{3}$;求 CD 的最大值

分析：连接 OD 易知 OD＝R,在 RT△OCD 中斜边一定，要求 CD 最大值，只须 OC 最小或最短，即过点 O 向 AB 作垂线，垂足为点 C，根据垂径定理易知 $CD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

变题 2（如图 6）在 RT△ABC 中，$\angle C=90^0$　AC=3　BC=4, ⊙C 的半径为 1, P 点是 AB 上的任意一个动点，过 P 点向⊙C 引一条切线，则最短的切线长。

分析：∵切线垂直于经过切点的半径

∴半径一定，要切线长最短，只能 PC 最短

故：P 点的位置应是过点 C 向 AB 做垂线时垂足的位置

易知$PM=\frac{1}{5}\sqrt{119}$

变题 3（如图 7）在 RT△ABC 中，$\angle C=90^0$　AC=BC=4,∠1=∠2,点 Q 和 P 分别是 AD 和 AC 上任意一点，求 CQ+PQ 的最小值，且在图中标出 Q 和 P 的准确位置。

分析：要使 CQ+PQ 最短，显然要利用两点之间线段最短，故过点 C 作 CM⊥AB 交 AD 于一点即为 Q 点，PQ 要最短，易知过 Q 点作 QP⊥AC,交点即为 P 点，易证 QP=QM

所以，CQ+PQ=CQ+QM=CM=2$\sqrt{2}$

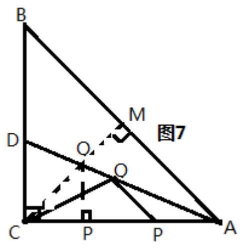

图7

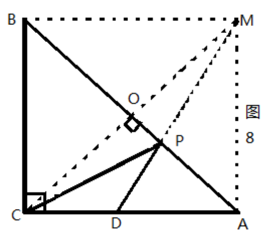

图 8

变题 4（如图 8）在 RTΔABC 中$\angle C=90^0$ AC=BC=2,D 点是 AB 上任意一点，求ΔPCD 的周长最小值。

分析：要求ΔPCD 的周长最小值 CD 的长度一定，因此只要 PC+PD 最短，故过点 C 作 CO$\perp$AB 且 OM=OC,连接 BM，AM，PM 易知四边形 AMBC 为正方形， PM=PC，

故，PC+PD+CD=PM+PD+CD=MD+CD=$\sqrt{5}$+1

（二）如图 4–3– 8,点 A 的坐标为(–1, 0),点 B 在直线 y=x 上运动，当线段 AB 最短时，点 B 的坐标为(　).

A（0,0）

B（$-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$）

C（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}$）

D（$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}$）

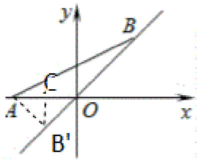

图 4–3– 8

分析如图 4–3–8,先过点 A 作 AB'$\perp$OB,垂足为 B'，由垂线段最短可知，当点 B 与点 B'重合时，AB 最短。因为点 B 在直线 y=x 上运动，所以

$\angle$AOB' =45°　。

因为 AB'$\perp$OB,所以△AOB'是等腰直角三角形，过点 B'作 B'C$\perp$x 轴，垂足为 C,所以△B'CO 为等腰直角三角形，因为点 A 的坐标为(–1, 0),所以OC=CB' = $\frac{1}{2}$ OA= $\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$，所以点 B'的坐标为($-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$)，即线段 AB 最短时，点 B 的坐标为($-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$).

答案　B

（三）如图 4–Z–8，直线 y=$\frac{2}{3}$x+ 4 与 x 轴、y 轴分别交于点 A 和 B，C，D 分别为线段 AB，OB 的中点，点 P 为 OA 上一动点，PC+PD 值最小时，点 P 的坐标为（　　）

A.（－3，0）

B.（－6，0）

C.（－$\frac{2}{3}$，0）

D.（－$\frac{5}{2}$，0）

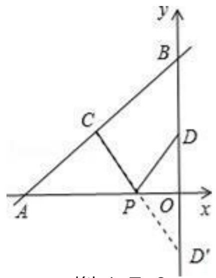

图 4–Z–8

图 4–Z–8 分析作点 D 关于 x 轴的对称点 D'，连接 CD′ 交 x 轴于点 P，此时 PC+PD 值最小，如图 4–Z–8 所示，令 y=$\frac{2}{3}$x+4 中 x=0，则 y=4 所以点 B 的坐标为(0,4),令 y=$\frac{2}{3}$x+4 中 y=0，则 $\frac{2}{3}$x+4=0,解得 x=–6,所以点 A 的坐标是（– 6,0).因为 C, D 分别为线段 AB, OB 的中点，所以 C 的坐标为(– 3，2),点 D 的坐标为(0，2)因为点 D'和点 D 关于 x 轴对称，所以点 D'的坐标为(0, –2).设直线 CD'的函数表达式为 y=kx+b(k|0).因为直线 CD'过点 C(– 3,2), D'(0, –2)，所以 b= – 2①, –3k+b=2②,把①代入②,得 k=–$\frac{4}{3}$，所以直线 CD'的函数表达式为 y= –.令 y= –中 y=0,则 0=–，解得 x= –$\frac{3}{2}$所以点 P 的坐标为（ -$\frac{3}{2}$，0）,故选 C

答案 C

三、对变题的反思

一个人智慧的高低，可以从他思维的灵敏度、清晰度、广泛度反映出来，我们要培养和造就无数的有慧心、有灵气、会学习、有创新能力的人，就要教会科学的思维方法，挖掘自身潜能，提高学习效率和整体素质。通过变题的训练，开阔了学生的视野，同时又取得了举一反三、触类旁通的效果，变题不仅能巩固基础知识，而且能深刻提示问题的内在本质属性。多层次，多角度地培养和锻炼发散思维能力。因此老师在讲变题时，首先应注意基础知识的教学，再发散他们的思维，但也不能设置过难、过偏的题形，这样会让学生感到不知所措。总之，变题后引导学生对问题进行观察、分析、归纳、类比、抽象、概括，让学生体会变题带来的乐趣，享受探究带来的成就感，逐步养成学生独立思考、积极探究的习惯，并懂得如何学数学。