直线参数方程的解析应用

◆黄芷仪

（武汉市华师一附中高三 23 班　430000）

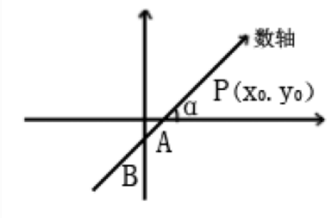
摘要：直线参数方程属于高考选考章节，但它在解析几何中也有非常广泛的应用。直线参数方程中的参数，在图上的几何意义为线段长度，因此解析几何中涉及长度和面积的问题往往都可以通过直线参数方程解决，本文对这一方面加以探讨。

关键词：参数方程；四点共圆；面积；弦长

一、知识简述

在平面直角坐标系中任取一点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点作任意一条倾斜角为 α 的直线，则该直线上的任意一点 $A(B)$ 均满足方程 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，且 $|t|=|AM|$）

该方程即为直线 l 的参数方程标准式



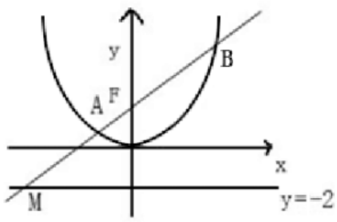
二、参数方程在解析几何中的应用

例题 1：已知抛物线 $C:x^2=4y$，焦点 $F(0,1)$，过点 F 作直线与曲线 C 交于两点 A、B，与直线 $y=-2$ 交于点 M，试求 $|MA|\cdot|MB|$ 的最小值

解法Ⅰ：（联立法）

解：设直线 AB 方程为 $y=kx+1$

则 $M\left(-\dfrac{3}{k},-2\right)$



$\begin{cases}x^2=4y\\ y=kx+1\end{cases}$

$\therefore$ $x^2-4kx-4=0$

$x_1+x_2=4k$ $x_1\cdot x_2=-4$ $\therefore$ $|MA|\cdot|MB|$

$=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_M|\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_M|$

$=(k^2+1)\left[x_1x_2-x_M(x_1+x_2)+{x_M}^2\right]$

$=8k^2+\dfrac{9}{k^2}+17$

根据均值不等式可知 $|MA|\cdot|MB|\ge 17+12\sqrt{2}$

解法Ⅱ：（参数方程联立）

解：设 AB 的参数方程为

$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）

$\therefore t_M=-\dfrac{3}{\sin\alpha}$

又 $t^2\cos^2\alpha=4+4t\sin\alpha$

$\therefore t_1+t_2=\dfrac{4\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ $t_1t_2=-\dfrac{4}{\cos^2\alpha}$

$\therefore |MA|\cdot|MB|=|t_M-t_1|\cdot|t_M-t_2|$

$=\left|{t_M}^2-(t_1+t_2)t_M+t_1t_2\right|$

$=\dfrac{9}{\sin^2\alpha}+\dfrac{8}{\cos^2\alpha}$

根据柯西不等式

$\dfrac{9}{\sin^2\alpha}+\dfrac{8}{\cos^2\alpha}$

$=\left(\dfrac{9}{\sin^2\alpha}+\dfrac{8}{\cos^2\alpha}\right)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\ge(3+2\sqrt{2})^2=17+12\sqrt{2}$

分析：课件直线参数方程处理多线段共线是非常方便的。

例题 2：已知抛物线 $x^2=4y$ 焦点 $F(0,1)$ 过点 F 作抛物线两条弦 AC、BD，且 $AC\perp BD$，如图，求阴影部分面积的最小值。

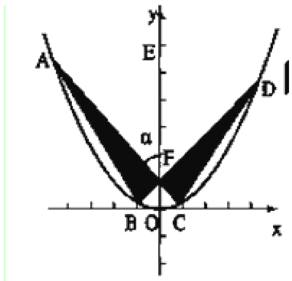
解法Ⅰ：（焦半径）

解：由抛物线定义可知

AF 与 A 到准线 $y=-1$ 距离相等

则

$AF=2+AF\cdot\sin\alpha$（α 为 AC 与 x 轴所成锐角）



$\therefore AF=\dfrac{2}{1-\sin\alpha}$

同理 $BF=\dfrac{2}{1+\cos\alpha}$

$CF=\dfrac{2}{1+\sin\alpha}$

$DF=\dfrac{2}{1-\cos\alpha}$

$\therefore$

$S_{阴}=\dfrac{AF\cdot BF}{2}+\dfrac{DF\cdot CF}{2}=\dfrac{2(2-2\sin\alpha\cos\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)(1+\sin\alpha)(1-\cos\alpha)}$

$S_{阴}=\dfrac{4(1-\cos\alpha\sin\alpha)}{(1-\sin^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)}$

$=\dfrac{4}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-\dfrac{4}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\left(\dfrac{4}{2\sin\alpha\cos\alpha}-1\right)^2-1=\left(\dfrac{4}{\sin2\alpha}-1\right)^2-1$

$\because \sin2\alpha\in[0,1]$

$\therefore S_{阴}=3^2-1=8$

解法Ⅱ：（参数方程）

解：设 AC 直线的参数方程为

$\begin{cases}x=t\cos\theta\\ y=1+t\sin\theta\end{cases}$

$\therefore t^2\cos^2\theta-4\sin\theta t-4=0$

$\therefore t_1=\dfrac{4\sin\theta+\sqrt{16}}{2\cos^2\theta}=\dfrac{2\sin\theta+2}{\cos^2\theta}$，$t_2=\dfrac{2\sin\theta-2}{\cos^2\theta}$

同理 $t_3=\dfrac{2\cos\theta+2}{\sin^2\theta}$，$t_4=\dfrac{2\cos\theta-2}{\sin^2\theta}$

$S_{阴}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\left|t_1t_3\right|+\left|t_2t_4\right|\right)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{8\sin\theta\cos\theta+8}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)=\dfrac{8\sin2\theta+16}{\sin2\theta}=\left(\dfrac{4}{\sin2\theta}+1\right)^2-1$

当 $\sin2\theta=-1$ 时，即 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ 时，S 有最小值 8

分析：本题涉及双线四点，使用一条直线的参数方程加以同理运算，大大降低复杂程度。

例题 3：已知抛物线 $y^2=x$，过 x 轴上两定点 $A(a,0)$，$B(b,0)$ 分别引直线 l 与 m（l 与 m 不平行）与抛物线有四个交点 A_1、A_2、B_1、B_2，当 A_1、A_2、B_1、B_2 四点共圆时，求证：l，m 的交点 P 在定直线上

证明：设 $P\left(x_0,y_0\right)$，l、m 的倾斜角分别为 θ_1、θ_2

则 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta_1\\y=y_0+t\sin\theta_1\end{cases}$

$\therefore t^2\sin^2\theta_1+y_0{}^2+2t\sin\theta_1y_0{}^2=x_0+t\cos\theta_1$

$\therefore t^2\sin^2\theta_1+\left(2y_0\sin\theta_1-\cos\theta_1\right)t+y_0{}^2-x_0=0$

$t_1\cdot t_2=\dfrac{y_0{}^2-x_0}{\sin^2\theta_1}$ 同理 $t_3\cdot t_4=\dfrac{y_0{}^2-x_0}{\sin^2\theta_2}$

$\because$ A_1、A_2、B_1、B_2 四点共圆，由相交弦定理知 $\left|PA_1\cdot PA_2\right|=\left|PB_1\cdot PB_2\right|$

即 $\sin^2\theta_1=\sin^2\theta_2$ $\because\theta_1\neq\theta_2$ $\therefore\theta_1+\theta_2=\pi$

联立 l,m 方程，解得 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$，故 P 在直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 上

分析：本题涉及到四点共圆的处理，需要多次求解线段长度，参数方程中 t 的几何意义正是线段长度，非常便捷。

例题 4：已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，坐标系内任意一条直线 l 交椭圆于 A、B 两点，求 $S_{\Delta AOB}$ 的最大值

解：设直线 l 过点 $(0,m)$

则 l 的参数方程为

$\begin{cases}x=t\cos\theta\\y=m+t\sin\theta\end{cases}$

$\therefore\left(3+\sin^2\theta\right)t^2+8\sin\theta mt+4m^2-12=0$

$\therefore S_{\Delta AOB}=\left|t_1-t_2\right|\cdot m\cdot\cos\theta\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{48\sin^2\theta m^2-48m^2+48\sin^2\theta+144}}{4-\cos^2\theta}$

$=2\sqrt{3}m\cdot\sqrt{\dfrac{\left[4-\cos^2\theta\left(m^2+1\right)\right]\cos^2\theta}{\left(4-\cos^2\theta\right)^2}}$

令 $4-\cos^2\theta$ 为 a，则 $a\in[3,4]$

$\therefore S_{\Delta AOB}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{-\left(\dfrac{4m}{6}-\dfrac{2m^2+1}{2m}\right)^2+\dfrac{1}{4m^2}}$

当 $a=4-\dfrac{4}{2m^2+1}$ 时 $S=\dfrac{\sqrt{2}}{m}$

$m\geq\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ 或 $m\leq-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ $\therefore$ 当 $m=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ 时，$S_{\Delta AOB}$ 有最大值 $2\sqrt{2}$

分析：本题应用参数方程处理三角形 ΔAOB 的面积，方法非常独到，值得借鉴。