

## 应用特征方程求解三类数列通项公式的探究

◆吴淑珍

(黄山职业技术学院 安徽黄山 245000)

摘要: 数列是数学中的重要内容, 求其通项是数列的难点。利用特征方程很容易求出三类数列的通项公式。

关键词: 特征方程; 通项公式; 数列

类型一 已知  $a_1 = m$ ,  $a_{n+1} = pa_n + q$  求  $a_n$

例1 已知  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 2a_n + 3$  求  $a_n$

解析: 令  $a_{n+1} = a_n = x$

构造特征方程  $x = 2x + 3$ , 得  $x = -3$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 2a_n + 3$$

$$a_{n+1} - (-3) = 2[a_n - (-3)]$$

$$\Rightarrow a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$$

$$a_n + 3 = (a_1 + 3)2^{n-1} = 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow a_n = 2^{n+1} - 3$$

类型二 已知  $a_1 = a$ ,  $a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ma_n + n}$

求  $a_n$  ( $a, p, q, m, n$  为常数)

例2 已知  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{4a_n + 3}{a_n + 2}$  求  $a_n$

解析: 令  $a_{n+1} = a_n = x$ ,

构造特征方程  $x = \frac{4x + 3}{x + 2}$  得,  $x_1 = -1, x_2 = 3$

$$a_{n+1} - (-1) = \frac{4a_n + 3}{a_n + 2} - (-1) \quad ①$$

$$a_{n+1} - 3 = \frac{4a_n + 3}{a_n + 2} - 3 \quad ②$$

$$\frac{①}{②} \Rightarrow \frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1} - 3} = 5 \left( \frac{a_n + 1}{a_n - 3} \right)$$

$$\text{由 } \frac{a_n + 1}{a_n - 3} = -5^{n-1} \text{ 得}$$

$$a_n = -\frac{3 \cdot 5^{n-1} + 1}{5^{n-1} + 1}$$

例3 已知  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = \frac{4a_n - 1}{a_n + 2}$  求  $a_n$

解析: 令  $a_{n+1} = a_n = x$ ,

构造特征方程  $x = \frac{4x - 1}{x + 2}$  得,

$$x_1 = x_2 = 1$$

$$a_{n+1} - 1 = \frac{4a_n - 1}{a_n + 2} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n - 1} + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n + 5}{n + 2}$$

类型三 已知  $a_1 = m, a_2 = n, a_3 = l, a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ ,

求  $a_n$

( $m, n, l, p, q$  为常数)

解析: 构造特征方程  $x^2 = px + q$  (※)

若方程 (※) 有两个不等的根  $x_1, x_2$

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$$

(2) 若方程 (※) 有两个相等的根  $x_1, x_2$

$$a_n = [m + (n - 1)d]x_1^n$$

例 4 已知数列

$\{a_n\}$   $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ , 求  $a_n$

解析: 构造特征方程  $x^2 - x - 2 = 0$  (※) 方程 (※) 有两个不等的根  $x_1, x_2$ 。

$$x_1 = -1, x_2 = 2$$

$$\text{设 } a_n = c_1(-1)^n + c_2 2^n$$

$$a_1 = 1, a_2 = 5$$

$$\Rightarrow a_n = (-1)^n + 2^n$$

例 5 已知数列

$\{a_n\}$   $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ , 求  $a_n$

解析: 构造特征方程  $x^2 - 4x + 4 = 0$  (※)

方程 (※) 有两个不等的根  $x_1 = x_2 = 2$

$$\text{设 } a_n = [m + (n - 1)d]2^n$$

又因为  $a_1 = 1, a_2 = 5$ ,

$$\Rightarrow a_n = (3n - 1)2^{n-2}$$

小结: 通过构造特征方程, 可以很轻松求一些数列的通项公式。

## 参考文献:

- [1] 雷亚庆. 浅谈高考对求数列通项公式问题的考查[J]. 高中数学教与学, 2012(2):6-7  
 [2] 李新卫. 几类递推数列通项公式的求法[J]. 数理化解题研究(高中版), 2010年09期:3-4

